

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6-8 feladat lesz.
- A dolgozatírásnál számológép használható.
- Minden választ indokolni kell, a végeredmény pusztá közlése nem elegendő.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésetekre.

1. Feladat. Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként a következő permutációt. Határozzuk meg a permutáció paritását is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{26} \cdot [(1\ 4\ 2)(1\ 5\ 3\ 6)]^{-1}$$

2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{array}{rrcrcl} & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

3. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének dimenzióját és egy bázisát:

$$U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)].$$

4. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_5^3$ vektortér U alterét generátorrendszer segítségével. Határozzuk meg U dimenzióját. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + 4x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0\}.$$

5. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)], \quad U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)].$$

6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0, 3x_3 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

7. Feladat. Határozzuk meg a $\varphi: \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x)$ lineáris transzformáció mátrixát az $\mathcal{F}: (2, 1), (1, 1)$ bázisban. Számítsuk ki a $v = (2, 0)$ vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

8. Feladat. Legyen a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén φ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó mérőleges vetítés. Adjuk meg mindkét lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

9. Feladat. Legyen az $\mathbb{R}^2$ vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban az alábbi A mátrix. Határozzuk meg a lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$ polinomnak a $c = 3$ szám a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

11. Feladat. Adjuk meg az $f = x^5 + x^3 - 6x$ polinom irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

12. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^3 - x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom racionális gyökeit és irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}[x]$ -ben. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

13. Feladat. Döntsük el, hogy a $T = \mathbb{Z}_3$ test, és ezen test feletti $f = x^2 + 1$ polinom esetén $T[x]/\langle f \rangle$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

14. Feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$ testet, és végezzük el a következő műveleteket:
 $\overline{x^3 + x + 1} \cdot \overline{x^2 + 1}, \quad \overline{x^3 + x^2}^{-1}.$

15. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben az $\alpha = \overline{x + 1}$ elem (multiplikatív) rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az α elem a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

16. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben az $\alpha = \overline{x + 1}$ elem minimálpolinomját.

17. Feladat. Határozzuk meg a $C = \{0102, 1010, 0021, 2200\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$ blokk-kód minimális távolságát, továbbá azt, hogy hány hibajelző, illetve hibajavító. Döntsük el, hogy a C kód lineáris-e.

18. Feladat. Legyen $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 6}$ egy szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy v kódszó-e, ha nem, akkor adjuk meg a $v = 211112$ -hez legközelebbi kódszót.

19. Feladat. Tervezzünk a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$ test $\alpha = \overline{x + 1}$ eleme segítségével 6-hosszú 2-hibajelző BCH-kódot. Adjuk meg a kód generátormátrixát.