

1. Feladat. Bilineáris-e az alábbi leképezés? Ha igen, adjuk meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

$$\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_1 y_1.$$

2. Feladat. Az $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$ valós kvadratikus alakot hozzuk kanonikus alakra, és határozzuk meg az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

3. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt a $(2, 3, -1), (-4, 14, 6)$ lineárisan független $\mathbb{R}^3$ -beli vektorrendszeren! (Normáljunk is!)

4. Feladat. Határozzuk meg az $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ és $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűben.

5. Feladat. Oldjuk meg az $(x^5 + x^4 + x^3 + 1)u + (x^4 + 1)v = x^2 + 1$ egyenletet a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

6. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$ polinomnak a $c = 3$ szám a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

7. Feladat. Adjuk meg az $f = x^5 + x^3 - 6x$ polinom irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

8. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^3 - x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom racionális gyökeit és irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

9. Feladat. Döntsük el, hogy a $T = \mathbb{Z}_3$ test, és ezen test feletti $f = x^2 + 1$ polinom esetén $T[x]/\langle f \rangle$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

10. Feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$ testet, és végezzük el a következő műveleteket: $\overline{x^3 + x + 1} \cdot \overline{x^2 + 1}, \quad \overline{x^3 + x^2}^{-1}.$

11. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben az $\alpha = \overline{x + 1}$ elem (multiplikatív) rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az α elem a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben.

12. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$ testben az $\alpha = \overline{x + 1}$ elem minimálpolinomját.

13. Feladat. Határozzuk meg a $C = \{0102, 1010, 0021, 2200\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$ blokk-kód minimális távolságát, továbbá azt, hogy hány hibajelző, illetve hibajavító. Döntsük el, hogy a C kód lineáris-e.

14. Feladat. Igazoljuk, hogy $C = \{0000, 1201, 2110, 2102, 1220, 0011, 2121, 1212, 0022\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$ lineáris kód. Határozzuk meg C információs rátáját. Adjunk meg egy C -vel ekvivalens D szisztematikus lineáris kódót. Adjuk meg D generátor- és ellenőrző mátrixát is.

15. Feladat. Legyen $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 6}$ egy szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy v kódszó-e, ha nem, akkor adjuk meg a $v = 211112$ -hez legközelebbi kódszót.

16. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2$ test feletti 7-hosszú Hamming-kód egy lehetséges P ellenőrző mátrixát, G generátormátrixát, valamint információs rátáját.

17. Feladat. Tervezzünk a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$ test $\alpha = \overline{x + 1}$ eleme segítségével 6-hosszú 2-hibajelző BCH-kódot. Adjuk meg a kód generátormátrixát.