

1. Feladat. Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként a következő permutációt. Határozzuk meg a permutáció paritását is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{26} \cdot [(1 \ 4 \ 2)(1 \ 5 \ 3 \ 6)]^{-1}$$

2. Feladat. Határozzuk meg hány olyan permutáció van $\sigma \in S_6$ -ban, amelyre $|M_\sigma| = 4$.

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval:

$$\begin{array}{rrcrcl} & & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő valós mátrix rangját, valamint adjunk meg a mátrixban maximális méretű nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánst.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Feladat. Adjuk meg a $v = (1, 0, 1)$ vektor koordinátasorát a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér

$$(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$$

bázisában.

6. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének dimenzióját és egy bázisát:

$$U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)].$$

7. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_5^3$ vektortér U alterét generátorrendszer segítségével. Határozzuk meg U dimenzióját.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + 4x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0\}.$$

8. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

$$U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)], \quad U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)].$$

9. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0, 3x_3 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

10. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a „merőleges vetítés az x tengelyre” transzformációt. Döntsük el, hogy lineáris transzformáció-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magját, képterét és azok dimenzióját, bázisát.

11. Feladat. Határozzuk meg a $\varphi: \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x)$ lineáris transzformáció mátrixát az $\mathcal{F}: (2, 1), (1, 1)$ bázisban. Számítsuk ki a $v = (2, 0)$ vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

12. Feladat. Legyen a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén ϕ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó merőleges vetítés. Adjuk meg mindkét lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

13. Feladat. Legyen az $\mathbb{R}^3$ vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban az alábbi A mátrix. Határozzuk meg a lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

14. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében a „merőleges vetítés az y tengelyre” lineáris transzformációt. Határozzuk meg a sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.