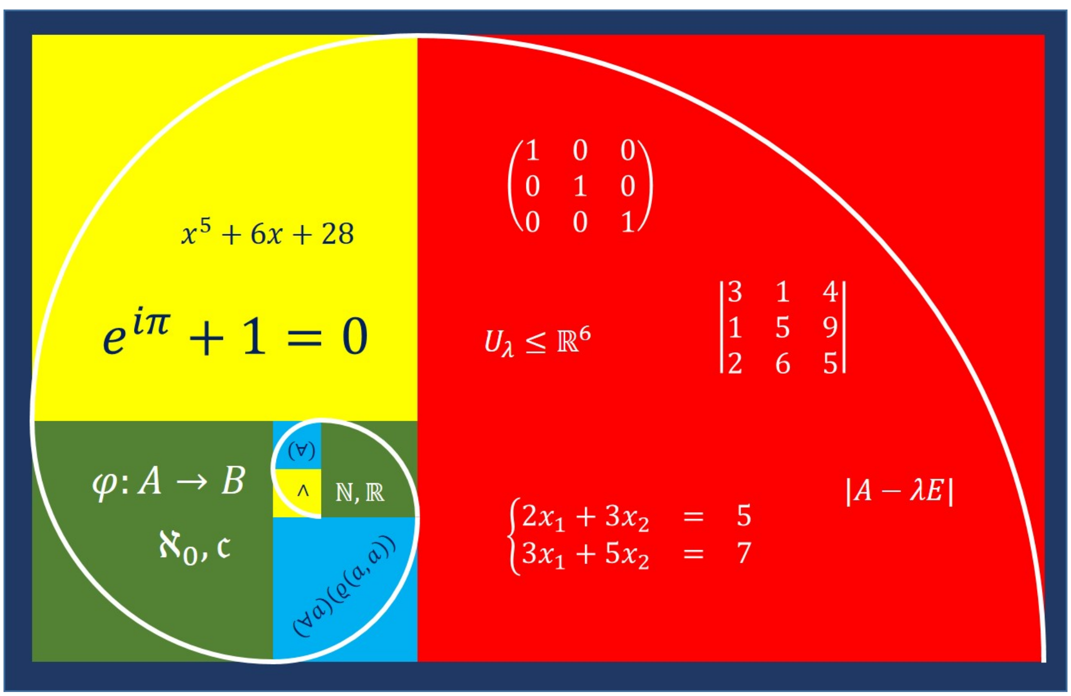
Feladatgyűjtemény

Diszkrét matematika I
(Informatikusoknak)



2022

Bevezetés

A feladatgyűjteményt készítették:

Bogya Norbert,	Dormán Miklós,	Győrffy Lajos
Kardos Gergely,	Kátai-Urbán Kamilla,	Katonáné Horváth Eszter
Kulin Júlia,	Kunos Ádám,	Szilák Zsófia
Torma Bence,	Torma Gábor,	Tóth Endre.

A feladatgyűjtemény a Diszkrét matematika I. (informatikusoknak) tárgyhoz készült. A feladatsorok az előadáson szereplő fogalmak gyakorlására szolgálnak. A szükséges definíciók, tételek megtalálhatók az előadásvázlatban, itt. Az 1. fejezetben a tárgy gyakorlatához tartozó feladatok találhatók (ítéletkalkulus, predikátumkalkulus, halmazok, relációk, leképezések, komplex számok, polinomok, mátrixok, lineáris egyenletrendszerek, vektorok), a 2. fejezetben pedig a feladatok eredményei vannak. Bizonyos feladatok esetén a teljes megoldást tartalmazó videó (youtube-videó) vagy kidolgozott megoldás (pdf-fájl) is elérhető. A feladatok számozása „1.x.y. feladat" alakú, ahol „x.y. feladat" a gyakorlatokon használt feladatsorok számozását követi, a megfelelő megoldások sorszáma: „2.x.y. feladat".

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Feladatok

1.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei

Kidolgozott feladat. Legyenek a prímítéletek:

A: *„Az öregsámán korai táborverést rendel el.”*,
B: *„A főkopjás követi őket.”*,
C: *„Az öregsámán a nyargalók védelmére szorul.”*

Formalizáljuk a következő állítást a prímítéletek felhasználásával:

Az öregsámán pontosan akkor rendel el korai táborverést, ha a főkopjás követi őket és az öregsámán nem szorul a nyargalók védelmére.

Megoldás. Vizsgáljuk a prímitéletek közötti kötőszavakat, a „pontosan akkor, ha” kötőszó ekvivalenciát jelöl, az „és” konjunkciót, a „nem” negációt. Így az állítás formalizáltja:

$$A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C)).$$

1.1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat az

A: *„Süt a nap.”*, B: *„Kimegyek az uszodába.”*, C: *„Hamburgert ebédelek.”*

prímítéletek felhasználásával:

(a) *Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.*
(b) *Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.*
(c) *Nem süt a nap.*
(d) *Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.*
(e) *Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.1)

1.1.2. Feladat. Adjuk meg az

$$F = (A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \to B)$$

formula összes részformuláját.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.2)

1.1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

(a) $(A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \wedge C\big)$, (b) $(A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \to C\big)$,
(c) $A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big)$ (d) $A \to \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big)$

formulák közül — a prímítéletek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.3)

Kidolgozott feladat. A prímítéletelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a

> *Ha ezt a mondatot jól formalizálom és esik az eső, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor az, hogy kapok egy piros pontot azzal ekvivalens, hogy nem süt a nap.*

ítéletkalkulusbeli ítéletet.

Megoldás. Az ítélet részekre bontásában segítenek a kötőszavak, a prímítéletek azok a tagmondatok lesznek, amelyek már nem tartalmaznak logikai műveleteket:

A: *Jól formalizálom ezt a mondatot.*
B: *Esik az eső.*
C: *A gyakorlatvezetőnek jó kedve van.*
D: *Kapok egy piros pontot.*
E: *Süt a nap.*

Ezek után a kötőszavakhoz megkeressük a megfelelő logikai műveletet, és az állítás formalizáltja:

$$((A \wedge B) \vee C) \rightarrow (D \leftrightarrow (\neg E)).$$

1.1.4. Feladat. A prímítéletelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

(a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
(b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
(c) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
(d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
(e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
(f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.*
(g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
(h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
(i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
(j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*
(k) *Ha még egy *** mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök és utána tépem ki a hajamat.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.4)

1.1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A prímítéletek mindig „pozitívak” legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \ldots$ betűkkel.)

(a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.* (A: h, B: h, C: i, D: h)
(b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.* (A: i, B: h, C: i, D: h, E: i)
(c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* (A: i, B: i, C: i, D: h, E: h)

(⇝ eredmény: 2.1.5)

Kidolgozott feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciát:

$$(A \vee B) \wedge (C \to B) \equiv B \vee (\neg(A \to C)).$$

Megoldás. (1. mego.:) Legyen

$$\begin{aligned} F &= (A \vee B) \wedge (C \to B), \\ G &= B \vee (\neg(A \to C)). \end{aligned}$$

A	B	C	$A \vee B$	$C \to B$	F	$A \to C$	$\neg(A \to C)$	G
i	i	i	i	i	i	i	h	i
i	i	h	i	i	i	h	i	i
i	h	i	i	h	h	i	h	h
i	h	h	i	i	i	h	i	i
h	i	i	i	i	i	i	h	i
h	i	h	i	i	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	h	h	i	h	i	h	h

Az F és a G oszlopát összehasonlítva látjuk, hogy a formulák igazságértéke a változók tetszőleges logikai értéke esetén megegyezik, így $F \equiv G$.
(2. mego.:) Használjuk a bal oldali formula esetén a $C \to B \equiv (\neg C) \vee B$ ekvivalenciát, valamint azt, hogy $\vee$ disztributív $\wedge$-ra. Helyettesítsük továbbá A-t $\neg(\neg A)$-val.

$$(A \vee B) \wedge (C \to B) \equiv (A \vee B) \wedge ((\neg C) \vee B) \equiv (A \wedge (\neg C)) \vee B \equiv ((\neg(\neg A)) \wedge (\neg C)) \vee B.$$

Majd az egyik De Morgan azonosság segítségével kapjuk, hogy $(\neg(\neg A)) \wedge (\neg C) \equiv \neg((\neg A) \vee C)$, ahol a zárójelben szereplő formulát az előző lépéshez hasonlóan átírhatjuk implikációra.

$$((\neg(\neg A)) \wedge (\neg C)) \vee B \equiv (\neg(\neg A \vee C)) \vee B \equiv (\neg(A \to C)) \vee B.$$

Ezután a $\vee$ művelet kommutativitás használva az eredeti ekvivalenciában jobb oldalon szereplő formulát kapjuk.

1.1.6. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a) $(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$,
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$,

(c) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C$,
(d) $(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \equiv A \to (A \vee B)$,
(e) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \to A$,
(f) $((A \wedge B) \to A) \wedge (A \to (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.6)

1.1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

(a) (1) *Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*

(b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*

(c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.7)

Kidolgozott feladat. Döntse el, hogy tautológia-e az $(A \vee B) \wedge (C \to B)$ formula.

Megoldás: A formula tautológia, ha a változók tetszőleges logikai értéke esetén igaz a formula.
(1. mego.:) A formula igazságtáblázatának felírásával vizsgálhatjuk, hogy a formula tautológia-e. A formula megegyezik az előző kidolgozott feladatban szereplő F formulával, így az ott megadott igazságtáblázatból leolvasható, hogy a formula nem tautológia, hiszen lehet úgy értéket adni a logikai változóknak, hogy F hamis legyen.
(2. mego.:) Vizsgáljuk, hogy lehet-e hamis az $(A \vee B) \wedge (C \to B)$ formula igazságértéke. A konjunkció hamis, ha legalább az egyik tagja hamis. Az $A \vee B$ diszjunkció pontosan akkor hamis, ha mindkét tag hamis, tehát $A\colon h$ és $B\colon h$. Így a $(A \vee B) \wedge (C \to B)$ formula logikai értéke is hamis $A\colon h$, $B\colon h$ esetén (C logikai értéke tetszőleges), tehát a formula nem tautológia.

1.1.8. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

(a) $\big(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \to (\neg A))\big)$,
(b) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$,
(c) $A \to (A \wedge B)$,
(d) $A \vee \big(B \to (\neg A)\big)$
(e) $(A \vee B) \to ((A \vee (\neg B)) \to A)$
(f) $\big(B \vee (\neg A)\big) \to \big(B \vee (\neg A)\big)$,
(g) $\big(((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C\big) \leftrightarrow \big((A \leftrightarrow C) \wedge A\big)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.8)

1.1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$$F_1 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B)), \qquad F_2 = (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C),$$
$$F_3 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)), \qquad F_4 = (\neg A) \wedge B \wedge C.$$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.9)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes diszjunktív normálformáját:

$$((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg C).$$

Megoldás: (1. mego.:) Írjuk fel a formula igazságtáblázatát.

A	B	C	$A \vee B$	$A \wedge B$	$(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$	$\neg C$	$((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg C)$
i	i	i	i	i	i	h	h
i	i	h	i	i	i	i	i
i	h	i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	h	h	i	h
h	i	i	i	h	h	h	h
h	i	h	i	h	h	i	h
h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	h	h	h	i	i	i

A teljes diszjunktív normálforma leolvasható úgy, hogy tekintjük azokat a sorokat az igazságtáblázatban, ahol a formula logikai értéke igaz. Ahány igaz érték van, annyi elemi konjunkciós tag lesz, tehát esetünkben kettő. A formula igaz értékeinél vizsgáljuk a változók logikai értékét, ha i az érték, akkor a változó negálatlanul szerepel az elemi konjunkciós tagban, ha h, akkor pedig negálva. Így kapjuk a formula teljes diszjunktív normálformáját: $(A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))$.
(2. mego.:) Logikai ekvivalenciák segítségével is átalakítható a formula. Alkalmazzuk az implikációt a diszjunkcióval összekötő összefüggést, majd az egyik De Morgan azonosságot.

$$((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg C) \equiv (\neg(A \vee B) \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg C) \equiv (((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg C).$$

Ezután felhasználva, hogy a $\wedge$ művelet disztributív a $\vee$ műveletre megkapjuk a formula teljes diszjunktív normálformáját:

$$(((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)).$$

1.1.10. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$,

(b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C$,

(c) $(A \vee B) \rightarrow \big(\neg(C \rightarrow B)\big)$,

(d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B)$,

(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \to (\neg B)) \vee (A \wedge B))$,

(f) $(\neg(A \to B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.10)

1.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei

Kidolgozott feladat. Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $I(x)$ az „*x igazat mond*”, $B(x,y)$ az „*x barátja y-nak*” predikátumokat, $a(x)$ az „*x anyja*” függvényjelet, k pedig a „*Károly*” individuumkonstanst. Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

(a) $(\exists x)(I(x) \wedge (\neg B(x,k)))$,
(b) $(\forall x)(B(x,k) \to I(a(x)))$.

Megoldás.

(a) A $(\exists x)$ az úgynevezett egzisztenciális kvantor, ami a szövegben „van olyan”, „van, aki”, „létezik”, „található” kifejezésekkel jelenik meg. A logikai műveletek az ítéletkalkulusban szereplő műveletekkel egyeznek meg. Így hétköznapi nyelven a formula:
Van, aki igazat mond, és Károlynak nem a barátja.
(b) A $(\forall x)$ az úgynevezett univerzális kvantor, ami szövegben például a „bármely”, „minden”, „összes”, „tetszőleges” kifejezésekkel fejezhető ki. Perdikátumkalkulusban az implikáció sok esetben nem jelenik meg „ha, akkor” szövegként. Hétköznapi nyelven a formula például így fogalmazható meg:
Károly összes barájának anyja igazat mond.

1.2.1. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:

  $M(x)$: „*x négyzetszám*”, $P(x)$: „*x páros szám*”, $N(x)$: „*x negatív szám*”.

- kétváltozós predikátum:

  $O(x,y)$: „*x osztója y-nak*”,

- kétváltozós függvény(jel)ek

  $o(a,b) = a+b$, azaz a és b szokásos összege, $s(a,b) = a \cdot b$, azaz a és b szokásos szorzata.

Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

(a) $P(7)$,
(b) $M(4) \wedge \neg N(o(9,3))$,
(c) $(\forall x)(O(2, s(4,x)))$,
(d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x,6))$,
(e) $(\forall x)(O(4,x) \to P(x))$,
(f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x,y)) \leftrightarrow P(s(x,y)))$,
(g) $(\forall x)\Big(M(x) \to (\exists y)\big(P(y) \wedge O(x,y)\big)\Big)$,
(h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x,y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$,
(i) $(\exists x)\Bigg(P(x) \wedge (\forall y)\Big(\big(P(y) \wedge N(y)\big) \to \big(\neg O(y,x)\big)\Big)\Bigg)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.1)

Kidolgozott feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A-n, melyre

$$h(1) = 1,\ h(2) = 3,\ h(3) = 4,\ h(4) = 5,\ h(5) = 5,\ h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak (indoklással együtt).

(a) $(\exists x)\big(N(x) \land R(h(x), x)\big)$,
(b) $(\forall x)(\exists y)\big(N(x) \to E(h(y), x)\big)$.

Megoldás.

(a) A következőt kell eldöntenünk: van-e olyan $x \in A$ elem, ami négyzetszám, és $h(x) - x = 1$. A válasz igaz, az $x = 4$ teljesíti, mert a 4 négyzetszám, és $h(4) = 5$, tehát $h(4) - 4 = 1$. A formula ebben az interpretációban tehát igaz.
(b) A következőt kell eldöntenünk: teljesül-e minden $x \in A$ elemre, hogy van olyan $y \in A$, hogy ha x négyzetszám, akkor $h(y) = x$. A válasz igaz, hiszen az implikáció pontosan akkor lenne hamis, ha az előtag igaz, az utótag hamis. Tehát négyzetszámokat kell venni A-ból, ami az 1 és 4, de az $x = 1$ elemhez y-nak választhatjuk az 1-et, az $x = 4$ esetén pedig $y = 3$ a megfelelő elem, mert $h(1) = 1$ és $h(3) = 4$, így ezekben az esetkeben az utótag is igaz. A formula ebben az interpretációban tehát igaz.

1.2.2. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz, és legyen f az az egyváltozós függvényjel A-n, melyre

$$f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y)\colon x + y = 5, \quad Q(x)\colon x \text{ páros}, \quad E(x, y)\colon x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(a) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(x), y)\big)$,
(b) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(y), x)\big)$,
(c) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(x), y)\big)$,
(d) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(y), x)\big)$,
(e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$,
(f) $(\forall x)(\forall y)\big(\neg E(x, y) \to \neg E(f(x), f(y))\big)$,
(g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to P(y, x))$,
(h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to \neg E(x, y))$,
(i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \land P(y, x)) \to E(x, y))$,
(j) $(\exists x)(\forall y)\big(\neg E(f(y), x)\big)$,
(k) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x, y) \to (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y))\big)$,
(l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.2)

Kidolgozott feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat, a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött, illetve szabad előfordulásai?

(a) $(\forall x)((\exists y)K(x,y) \vee L(z))$,
(b) $(\forall y)M(k(x,b),x) \vee (\exists z)(M(y,k(z,a)))$.

Megoldás. Ha egy változóra vonatkozik kvantor (azaz a változó egy kvantor hatáskörén belül van), akkor az a változó kötött előfordulása, különben pedig szabad előfordulása. A piros szín jelöli a kötött, a zöld pedig a szabad előfordulást.

(a) $(\forall x)((\exists y)K(x,y) \vee L(z))$,
(b) $(\forall y)M(k(x,b),x) \vee (\exists z)(M(y,k(z,a)))$.

1.2.3. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat; a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

(a) $(\forall x)(K(x,y) \vee L(x))$,
(b) $(\exists y)(I(s(x,y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x,y)))$,
(c) $M(k(x,b),x) \wedge (\exists z)(M(y,k(z,a)))$,
(d) $(\forall x)P\big(f(x,a),x\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y,x),y\big) \wedge Q(x)\Big)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.3)

Kidolgozott feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak. Továbbá adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$I(x)$: „*x informatikus*”, $Sz(x,y)$: „*x szomszédja y-nak*”,
$R(x)$: „*x szeret röplabdázni*”, v: „*Viki*”.

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

Megoldás. Érdemes az ítéletet átfogalmazni úgy, hogy jobban látszódjon, hogy milyen logikai műveletek szerepelnek: *Minden ember, ha informatikus és Viki szomszédja, akkor szeret röplabdázni.* Így a következő formulát kapjuk:

$$(\forall x)\big((I(x) \wedge Sz(x,v)) \to R(x)\big).$$

A tagadáshoz először használjuk a $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$, és az implikációt írjuk fel diszjunkció és negáció segítségével.

$$\neg(\forall x)\big((I(x) \wedge Sz(x,v)) \to R(x)\big) \equiv (\exists x)\neg\big(\neg(I(x) \wedge Sz(x,v)) \vee R(x)\big).$$

Ezután használjuk a megfelelő De Morgan azonosságot, továbbá a dupla tagadást, valamint a konjunkció asszocivitása miatt a zárójelezést elhagyjuk:

$$(\exists x)\big(\neg(\neg(I(x) \wedge Sz(x,v))) \wedge \neg R(x)\big) \equiv (\exists x)\big(I(x) \wedge Sz(x,v) \wedge \neg R(x)\big)$$

A formulát hétköznapi nyelven megfogalmazva ellenőrizhetjük, hogy tényleg az eredeti ítélet tagadását kaptuk.
Van olyan informaikus szomszédja Vikinek, aki nem szeret röplabdázni.

1.2.4. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: *„x hallgató”*, $V(x)$: *„x felkészült a vizsgára”*, $B(x,y)$: *„x az y barátja”*,
$C(x,y)$: *„x csoporttársa y-nak”*, $T(x,y)$: *„x házastársa y-nak”*, $F(x)$: *„x férfi”*,
$A(x)$: *„x anya”*, p: *„Péter”*, $a(x)$: *„x anyja”*,
$S(x)$: *„x szeret főzni”*.

(a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
(b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
(c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
(d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
(e) *Vannak nőtlen férfiak.*
(f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
(g) *Péter összes barátja hallgató.*
(h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
(i) *Péter anyja szeret főzni.*

(⇝ eredmény: 2.2.4)

1.2.5. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

(a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
(b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
(c) *Minden 10-zel oszható szám 0-ra végződik.*
(d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
(e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

(⇝ eredmény: 2.2.5)

1.2.6. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

(a) *Minden informatikus éhes.*
(b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
(c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*

(d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
(e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
(f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
(g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.6)

1.3. Halmazok

Kidolgozott feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit.

(a) $\overline{A} \setminus B$,
(b) $(A \triangle C) \cap B$,
(c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

Megoldás.

(a) Az $\overline{A}$ halmaz elemeit határozzuk meg először: $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$. Majd ezen elemek közül elhagyjuk azokat, amelyek B-nek is elemei: $\overline{A} \setminus B = \{7, 8\}$,
(b) Mivel $A \triangle C = \{1, 4, 5, 7\}$, így $(A \triangle C) \cap B = \{1, 5\}$,
(c) Először a $C \cap B$ halmaz elemeit határozzuk meg: $C \cap B = \{2, 5\}$, majd ezen halmaz hatványhalmazát, amelynek elemei a $C \cap B$ halmaz összes részhalmaza: $\mathcal{P}(C \cap B) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$.

1.3.1. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $\overline{B}$, (d) $A \setminus B$,
(e) $A \triangle B$, (f) $(A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}$, (g) $\mathcal{P}(B)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.1)

1.3.2. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$, (d) $B \setminus A$,
(e) $A \triangle B$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.2)

1.3.3. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

(a) $\emptyset \in A$, (b) $\emptyset \subseteq A$, (c) $\{\emptyset\} \in A$, (d) $\{\emptyset\} \subseteq A$,
(e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$, (f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$, (g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$, (h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.3)

1.3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.4)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{c, f, i\}, \{d, g, k\}, \{e, h, j, j\}\}$,
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{c, d, k\}, \{e, f, g, h\}, \{i\}, \emptyset\}$.

Megoldás.

(a) A $\mathcal{C}_1$ osztályozás, hiszen a részhalmazok nemüresek, diszjunktak, és egyesítésük kiadja az A-t. Az nem jelent problémát, hogy az egyik osztályban a j duplán szerepel, mert a halmazok esetén hiába van többször felsorolva egy elem, akkor is csak egyszer vesszük figyelembe.
(b) A $\mathcal{C}_2$ nem osztályozás, egyik részhalmazban sem szerepel a j elem, és tartalmazza az $\emptyset$-t.

1.3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$,
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$,
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$,
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$,
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$,
(f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.5)

Kidolgozott feladat. Adjunkn meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 5 osztálya van,
(b) minden osztálya legalább 3 elemű,
(c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

Megoldás. Több megfelelő osztályozás létezik, egy-egy megfelelő példát adunk meg.

(a) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}$,
(b) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\}$,
(c) $\{\{a, b, c, d, e, f, g, h\}\}$.

1.3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 3 osztálya van;
(b) pontosan 3 osztálya van;
(c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
(d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.6)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,
(b) $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

Megoldás.

(a) Nem, ha $A = B = C = \{1\}$, akkor $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$ és $A \setminus (B \setminus C) = \{1\}$.
(b) Igen, mivel

$$B \setminus (A \cup C) = B \cap \overline{A \cup C} = B \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = (B \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{C}) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C).$$

1.3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$,
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$,
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$,
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.7)

1.3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.8)

1.3.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

(a) $A \subseteq B$,
(b) $A = B$,
(c) $B \setminus A = \emptyset$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.9)

1.3.10. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

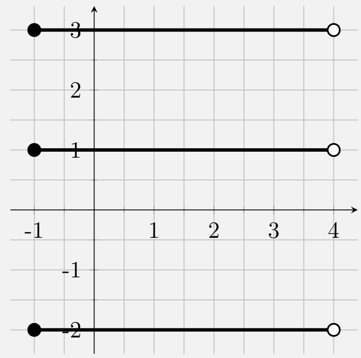
(a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$,
(b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq A \cap C \cap D$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.10)

Kidolgozott feladat.

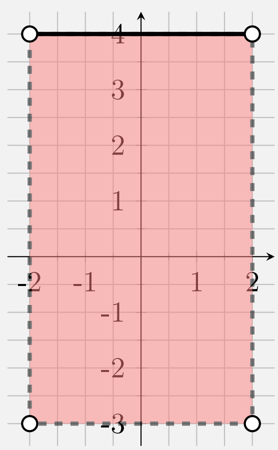
(a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = (-3; 4]$. Ábrázoljuk Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.

(b) Adjuk meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.



Megoldás.

(a)



(b) Mivel az ábrázolt pontok első komponensére $-1 \leq x < 4$ teljesül, így $A = [-1; 4)$. A második komponens pedig a -2, 1, 3 értékeket veszi fel, így $B = \{-2, 1, 3\}$.

1.3.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $(A \times B)$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

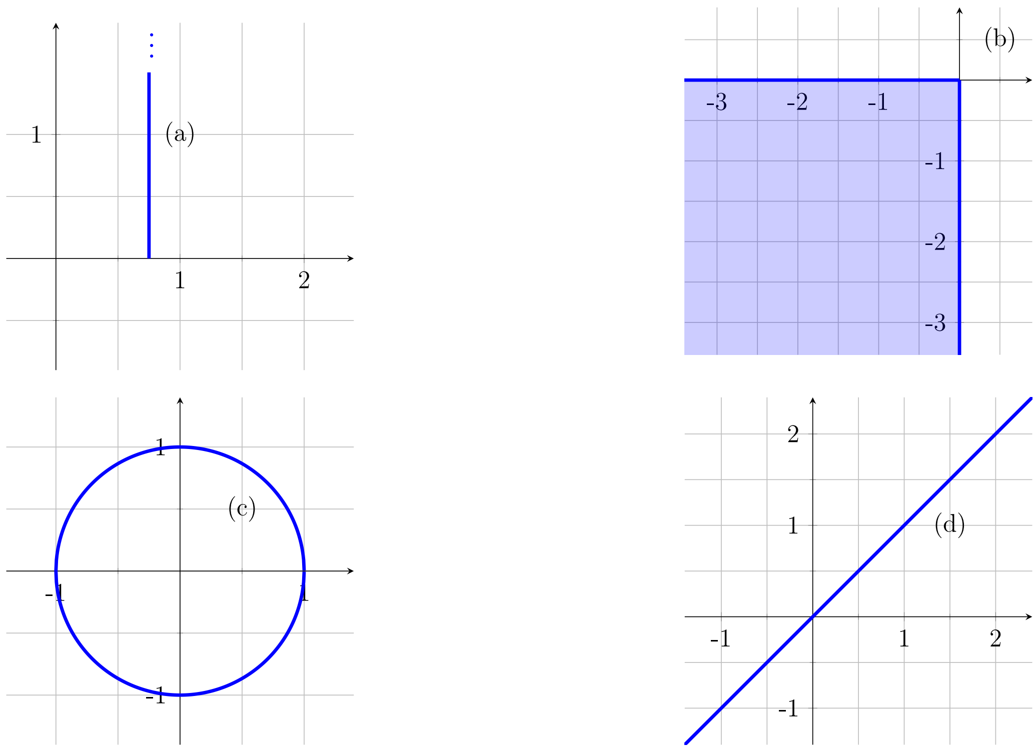
(a) $A = \{1, 3\},\ B = \{-1, 0, 2\}$,

(b) $A = \{1, 3\},\ B = [1; 3)$,

(c) $A = (-1; 2],\ B = [1; 3)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.11)

1.3.12. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?



(⇝ eredmény: 2.3.12)

1.4. Relációk

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A-n. Határozzuk meg a következő relációkat.

(a) $\alpha \setminus \beta$,
(b) β^{-1},
(c) $\alpha^{-1}\beta$.

Megoldás.

(a) Tekintjük azokat az elemet, amelyek α-ban szerepelnek, de β-ban nem: $\alpha \setminus \beta = \{(2, 1), (4, 2), (5, 3)\}$.
(b) A β-ban szereplő elempárok komponenseinek sorrendjét felcsrélve kapjuk: $\beta^{-1} = \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (1, 5)\}$.
(c) Mivel $\alpha^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (1, 5), (3, 5)\}$, így a szorzást elvégezve: $\alpha^{-1}\beta = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 1), (1, 1), (3, 1)\}$.

1.4.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \quad \text{és} \quad \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

(a) $\alpha \cap \beta$, (b) $\alpha \setminus \beta$, (c) α^{-1}, (d) $\alpha\beta$,
(e) $\beta\alpha$, (f) $\beta\alpha^{-1}$, (g) $\beta \cap \alpha^{-1}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.1)

1.4.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi α és β relációk esetén az α^{-1}, $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációkat. (Az $\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

(a) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon y \text{ az } x \text{ apja}\}$,
(b) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2^y\}$,
(c) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - 1 = 3x\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.2)

1.4.3. Feladat. Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$$

reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

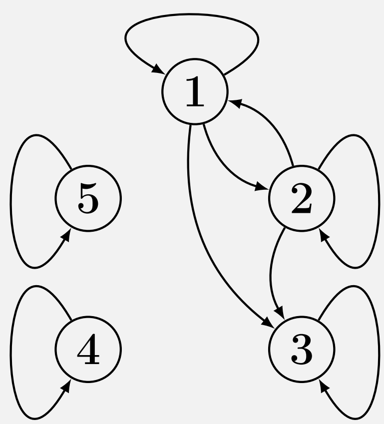
($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.3)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg a gráfjával egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket.

(a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
(b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

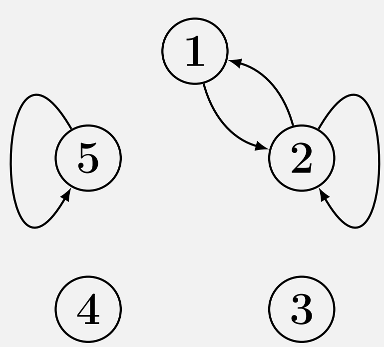
Megoldás.

(a) Például az α reláció lehet a következő gráffal megadott.



Az α reláció reflexív, mivel minden pontban van hurokél.
Tranzitív, mert tetszőleges pontok esetén, ha egyik pontból a másikba irányított élek mentén eljutunk, akkor egy élen is el tudunk jutni.
Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $1 \neq 2$.

(b) Például a β reláció lehet a következő gráffal megadott.



A β nem reflexív, pl. $(1, 1) \notin \beta$.
Szimmetrikus, mert ha két pont között vezet egyik irányba él, akkor az ellentétes irányba is, és természetesen ez a hurokél esetén is igaz.
Nem dichotom, mert pl. $(1, 3) \notin \beta$ és $(3, 1) \notin \beta$. (Megj.: az hogy nem dichotom, abból is következik, hogy nem reflexív.)

1.4.4. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

(a) reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
(b) antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
(c) dichotom de nem reflexív.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.4)

Kidolgozott feladat. Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok.

(a) $\alpha = \{(a,b)\colon |a-b| > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, reflexivitás és szimmetria,
(b) $\beta = \{(x,y)\colon xy = 1\} \subseteq \{-1,1,2,4,7,10\} \times \{-1,1,2,4,7,10\}$, antiszimmetria és dichotomia,
(c) $\gamma = \{(x,y)\colon x < y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tranzitivitás és dichotomia.

Megoldás.

(a) Az α reláció nem reflexív, mert pl. $|1-1| = 0 \not> 0$, így $(1,1) \notin \alpha$. Az α reláció szimmetrikus, mert $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$, így ha $(a,b) \in \alpha$, akkor $(b,a) \in \alpha$ is teljesül.
(b) Mivel $\beta = \{(1,1),(-1,-1)\}$, így antiszimmetrikus, mert nincs $a \neq b$, amelyre $(a,b) \in \beta$. A β reláció nem dichotom, pl. $(1,2) \notin \beta$ és $(2,1) \notin \beta$.
(c) A γ reláció tranzitív, mert tetszőleges $x,y,z \in \mathbb{R}$ esetén, ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$. Nem dichotom, mert nem reflexív, sőt $x \not< x$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

1.4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

(a) $\{(a,b)\colon |a-b| \leq 2\}$ a $\{-1,0,1,2,3\}$ halmazon,
(b) $\{(x,y)\colon x \leq y\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(c) $\{(x,y)\colon x < y\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(d) $\{(a,b)\colon ab \geq 0\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(e) $\{(a,b)\colon a^2 \geq b^2\}$ az egész számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(f) $\{(x,y)\colon |x| = |y|\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(g) $\{(x,y)\colon 2 \mid x+y\}$ a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán,
(h) $\{(a,b)\colon 4 \mid b-a\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(i) $\{(a,b)\colon a^2 < b^2\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(j) $\{(X,Y)\colon X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.5)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg olyan osztályozást az $A = \{a,b,c,d,e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adjuk meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt az elemeinek felsorolásával.
Megoldás. Egy ilyen osztályozás például: $A/\rho = \{\{a\},\{b,c\},\{d,e\}\}$.
Az ekvivalenciarelációk reflexív, szimmetrikus, tranzitív relációk. A reflexivitás miatt, minden elem saját magával relációban áll. A blokkokat úgy képeztük, hogy azok az elemek alkotják, amelyek relációban állnak, de a szimmetria miatt mindkét sorrendben szerepelnie kell az elempároknak. Két különböző blokk elemei viszont nem lehetnek relációban. Így a fenti osztályozás egyértelműen meghatározza a $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b),(d,d),(e,e),(d,e),(e,d)\}$ ekvivalenciarelációt.

1.4.6. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.6)

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ és $B = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$. Adjuk meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

(a) $\alpha = \{(a, b)\colon a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az A halmazon,
(b) $\beta = \{(a, b)\colon a \text{ és } b \text{ néggyel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ a B halmazon.

Megoldás. Ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozás esetén azok az elemek kerülnek egy részhalmazba, amelyek relációban állnak egymással, így a következőket kapjuk.

(a) $A/\alpha = \{\{1\}, \{2, 23, 26, 32\}, \{4, 47, 84\}\}$.
(b) $B/\beta = \{\{0, 16, 24\}, \{1, 5\}, \{3, 11, 15\}\}$.

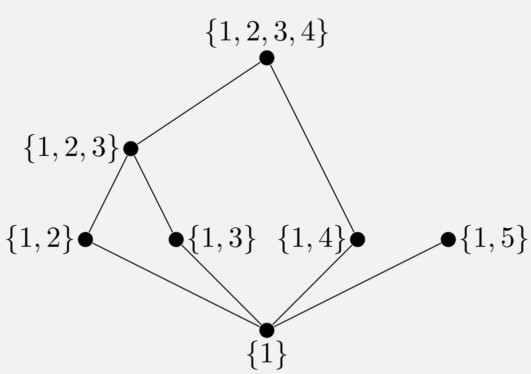
1.4.7. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

(a) $\{(a, b)\colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
(b) $\{(a, b)\colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
(c) $\{(H, G)\colon |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon
(d) $\{(x, y)\colon x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon
(e) $\{(x, y)\colon x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon
(f) $\{(a, b)\colon |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(g) $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \text{ páros}\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.7)

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adjuk meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját! Döntsük el, hogy melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek.

Megoldás.



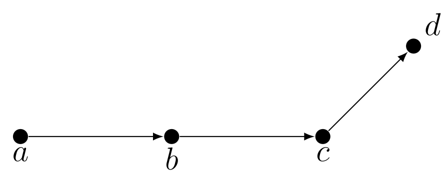
Ahogy az ábrán is látszik egyetlen minimális elem van, ami így legkisebb elem is lesz. Maximális elemből viszont kettő van, ezek nem összehasonlíthatók, így nincs legnagyobb elem.
Minimális elem: $\{1\}$,
maximális elemek: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5\}$,
legkisebb elem: $\{1\}$,
legnagyobb elem: nincs.

1.4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

(a) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$,
(b) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
(c) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$,
(d) $(D; |)$, ahol $D = \{0, 1, 2, 4, 7, 14, 28, 32\}$,
(e) $(E; \sqsubseteq)$, ahol $E = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye,
(f) $(F; \leq)$, ahol $F = \{(1,1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2,2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.8)

1.4.9. Feladat. Adjuk meg a következő gráf által meghatározott ρ reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, reflexív és tranzitív lezártját.



($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.9)

1.4.10. Feladat. Legyen $\rho = \{(a,b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a ρ gráfját és adjuk meg (ne csak a gráfjával)

(a) ρ reflexív lezártját,
(b) ρ szimmetrikus lezártját,
(c) ρ tranzitív lezártját,
(d) ρ reflexív és tranzitív lezártját.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.10)

1.4.11. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

(a) $\{(a,b) \in A^2 : |a - b| = 2\}$, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
(b) $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b = 0\}$,
(c) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\}$,
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 1\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.11)

1.5. Leképezések & Halmazok számossága

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket, ahol
$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x\alpha = 2^{x+1},$ és $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x\beta = x^3.$

Megoldás. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = 2^{x+1}\beta = (2^{x+1})^3 = 2^{3x+3}$, tehát

$$\alpha\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x(\alpha\beta) = 2^{3x+3}.$$

$x(\beta\alpha) = (x\beta)\alpha = x^3\alpha = 2^{x^3+1}$, tehát

$$\beta\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x(\beta\alpha) = 2^{x^3+1}.$$

Vegyük észre, hogy $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, tehát a leképezésszorzás nem kommutatív.

1.5.1. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2,\quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1,$
(b) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 2^x - 1,\quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3^{x-1},$
(c) $\alpha\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2},\quad \beta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x - 1).$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.1)

Kidolgozott feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az α, β és γ leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e, ahol
$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x\alpha = |x + 2|,$
$\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ (x, y)\beta = xy$, és
$\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ \ x\gamma = x^2.$

Megoldás. Az α leképezés nem injektív, hiszen $0\alpha = (-4)\alpha = 2$. Nem is szürjektív, hiszen negatív egész számot nem vesz fel értékként. Ennélfogva nem is bijektív.
A β leképezés nem injektív, hiszen pl. $(1, 2)\beta = (2, 1)\beta = 2$. Szürjektív, mert minden valós szám előáll képként: ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor pl. $(x, 1)\beta = x$. Nem bijektív, mert nem injektív.
A γ leképezés injektív. Ez elsőre furcsának tűnhet, mert az x^2 függvény a nem injektív függvények alap példája szokott lenni. De figyeljük meg, hogy az értelmezési tartományt most megszorítottuk a pozitív valós számok halmazára, és ott már teljesül, hogy különböző elemek képe különböző, mert a pozitív valós számok halmazán az x^2 egy szigorúan monoton növő függvény. Nem szürjektív, mert pl. a -1 nem áll elő képként. Nem bijektív, mert nem szürjektív.

1.5.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2,$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x\beta = x^2,$
(c) $\gamma = \{(x, y)\colon x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E},$

(d) $\delta = \{(x, y)\colon \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$,
(e) $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\varepsilon = \frac{4}{x}$,
(f) $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n\zeta = |n-3| + 1$,
(g) $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma,
(h) $\theta\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$,
(i) $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x-1, 1)$,
(j) $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.2)

1.5.3. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(a) nem szürjektív,
(b) szürjektív, de nem bijektív,
(c) injektív, de nem bijektív,
(d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.3)

Kidolgozott feladat. Ellenőrizzük, hogy az

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 5x + 2$$

leképezés bijektív, és adjuk is meg az inverzét.

Megoldás. A bijektivitás ellenőrzéséhez az injektivitást és szürjektivitást fogjuk külön-külön bizonyítani. Az injektivitáshoz azt kell bizonyítanunk, hogy $x\alpha = y\alpha$ esetén $x = y$. Tehát $5x+2 = 5y+2$-ből kell $x = y$-t kapnunk. Ez nem nehéz, a szokásos egyenletrendezési mérleg-elv használatával:

$$5x + 2 = 5y + 2 \quad \Rightarrow \quad 5x = 5y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

A szürjektivitás bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy az $\mathbb{R}$ halmaz minden eleme előáll képként. Ehhez legyen $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges, őt akarjunk képként előállítani. Találnunk kell olyan $x \in \mathbb{R}$ elemet, melyre $x\alpha = y$, azaz

$$5x + 2 = y. \tag{1.1}$$

Ezt a lineáris egyenletet kell tehát x-re megoldanunk, mely nem nehéz, $x = \frac{y-2}{5}$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy az y értéket az α leképezés felveszi az $\frac{y-2}{5}$ helyen, tehát szürjektív. Készen vagyunk tehát a bijektivitás bizonyításával.
Az inverz meghatározásához (általában is) az $y\alpha = x$ egyenletet kell megoldanunk y-ra, mely lényegében (1.1) – csak x és y szerepét felcseréltük. Tehát $y = \frac{x-2}{5}$ adódik. Az α leképezés inverze tehát

$$\alpha^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha^{-1} = \frac{x-2}{5}.$$

1.5.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 3x - 1$,
(b) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\beta = (x+2)^2 - 4$,
(c) $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\gamma = (2x+1)^2 - 1$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.4)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg bijekciót az $(1;2)$ és $(-5;22)$ nyílt intervallumok között.

Megoldás. Két nyílt intervallum között mindig bijekciót létesíthetünk egy lineáris fügvénnyel, mely

$$x\alpha = ax + b \tag{1.2}$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Már csak meg kell találnunk az a és b értékeket. Ezeket az intervallumok végpontjaihoz igazítjuk. Leképezésünk legyen mondjuk $\alpha\colon (1;2) \to (-5;22)$. Nyilván, ekkor annak kell teljesülnie a végpontokra, hogy $1\alpha = -5$ és $2\alpha = 22$. Ezen összefüggésekből, (1.2)-t felhasználva, a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b &= -5, \\ a \cdot 2 + b &= 22. \end{aligned}$$

Egy ilyen egyenletrendszert többféleképpen megoldhatunk. Most kézenfekvő lehet az első egyenlet kivonása a másodikból, melyből azonnal $a = 27$ adódik, ahonnan, mondjuk az első egyenletből, $b = -32$. Egy megfelelő bijekció tehát

$$\alpha\colon (1;2) \to (-5;22),\ x\alpha = 27x - 32.$$

1.5.5. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között, azaz igazoljuk, hogy a halmazok számossága megegyezik.

(a) $(0;1)$ és $(-2;3)$, (b) $(1;6)$ és $(4;7)$, (c) $(0;1)$ és $\mathbb{R}$, (d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.5)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $B = \mathbb{Z}$,
(b) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ és $B = \mathbb{Z}$,
(c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \mathbb{N}^{100}$.

Megoldás. Az ilyen feladatokat már nem bijekciók megadásával, illetve nemlétezésük bizonyításával oldjuk meg, hanem a feladatban szereplő nevezetes halmazok számosságaira fókuszálunk. Akkor és csak akkor létezik ugyanis bijekció két halmaz között, ha a számosságuk megegyezik. Az elméletből tudjuk, hogy a feladatban szereplő, nevezetes halmazok számossága

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0, \text{ és } |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

Továbbá sokszor használható ezeknél a feladatoknál a számosságaritmetika alaptétele: legyenek C és D halmazok úgy, hogy legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres), ekkor

$$|C \cup D| = |C \times D| = \max\{|C|, |D|\}.$$

Az (a) részbeli $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz számossága „$\mathfrak{c} - \aleph_0$" alakú. Általában, ha az $\alpha \geq \aleph_0$ és β számosságokra $\alpha > \beta$ teljesül, akkor az „$\alpha - \beta$" alakú számosságok mindig α-val egyenlőek. Ennélfogva $|A| = \mathfrak{c}$, és mivel $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, így a válasz NEM; nem létezik $A \to B$ bijekció az (a) feladatrészben.
Másik megoldás: $|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \max\{|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|, |\mathbb{Q}|\}$ a számosságaritmetika alaptétele szerint. Valamint tudjuk, hogy $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ és $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ számosága nem lehet $\aleph_0$. Így nem létezik bijekció $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $B = \mathbb{Z}$ között.
A (b) részre térve, az $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmaz számossága „$\aleph_0 - \aleph_0$" alakú. Általában az „$\alpha - \alpha$" (ahol α egy tetszőleges számosság) alakú számosságokról csak annyit tudunk, hogy kisebb vagy egyenlőek, mint α, azaz jelen esetben $|A| \leq \aleph_0$, mely egyébként is eléggé triviális. Könnyű látni azonban, hogy a $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmaz végtelen elemszámú, és mivel a legkisebb végtelen számosság $\aleph_0$, ezért $|A| \geq \aleph_0$. Az $|A|$-ra eddig kapott két egyenlőtlenséget összevetve $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_0$, melyből adódik, hogy végig egyenlőség áll fenn, azaz $|A| = \aleph_0$. Mivel $\mathbb{Z}$-nek is $\aleph_0$ a számossága, így a válasz IGEN, létezik bijekció a (b) részben.
A (c) részbeli $\mathbb{N}^{100}$ ugyebár $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ egy 100 tényezős szorzat. A számosságartimetika alaptétele szerint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\}$, ahonnan

$$|\mathbb{N}^{100}| = \max\{\aleph_0, \ldots, \aleph_0\} = \aleph_0.$$

A válasz a (c) feladatrészben tehát NEM; nem adható meg bijekció, hiszen $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

1.5.6. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, (c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$,
(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$, (e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$, (f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$,
(g) $A = \mathbb{N}^3$, $B = \mathbb{Z}$, (h) $A = \mathbb{Q}^4$, $B = \mathbb{N}^2$, (i) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{Z}^8$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.6)

1.5.7. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.7)

1.6. Komplex számok & Polinomok

Kidolgozott feladat. Kanonikus alakban számolva adjuk meg a

$$\frac{(2+i)((1-3i)+(-2+4i))}{\overline{-3+i}+|3-4i|}$$

komplex szám kanonikus alakját.

Megoldás. Külön-külön kiszámítjuk a nevezőt és a számlálót is kanonikus alakban, majd a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával, és így megkapjuk a tört kanonikus alakját.

$$\begin{aligned}\frac{(2+i)((1-3i)+(-2+4i))}{\overline{-3+i}+|3-4i|} &= \frac{(2+i)(-1+i)}{-3-i+\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{2\cdot(-1)+2\cdot i+i\cdot(-1)+i\cdot i}{2-i} \\ &= \frac{-3+i}{2-i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-7-i}{5} = -\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.\end{aligned}$$

1.6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva végezzük el a következő műveleteket, adjuk meg a végeredmény kanonikus alakját:

(a) i^{2019}, (b) i^{-22}, (c) $(3+5i)(2-7i)$,

(d) $(\overline{-6+9i}+4-8i)\cdot i$, (e) $|-3+4i|\cdot(-3-i)$, (f) $\dfrac{-7-i}{1+4i}$,

(g) $\overline{\dfrac{1+3i}{3+2i}}$, (h) $\dfrac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$, (i) $\dfrac{\mathrm{Re}(3+5i)-(4-2i)}{(3-2i)+\mathrm{Im}(6+i)}$.

(⇝ eredmény: 2.6.1)

1.6.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán, a megoldásokat kanonikus alakban adjuk meg:

(a) $(1-3i)z=13-9i$, (b) $\overline{3-2i}\cdot z+(-1+5i)=2i$, (c) $z^2+|z|^2=8+6i$,

(d) $z^2=i$, (e) $z^2=-15+8i$, (f) $z^2=5-12i$.

(⇝ eredmény: 2.6.2)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $3+\sqrt{3}i$ komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. A szám abszolútértékének kiemelésével kezdjük, amely

$$\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}.$$

Tehát a kiemelés:

$$3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Olyan α szöget keresünk, amelyre $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Ez a szög $\alpha = \frac{\pi}{6}$, tehát a keresett trigonometrikus- és exponenciális alakok rendre

$$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{és} \qquad e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

1.6.3. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba ezeket:

(a) 3, (b) -5, (c) i,
(d) $-4i$, (e) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, (f) $1-i$,
(g) $1-\sqrt{3}i$, (h) $-\sqrt{3}-i$, (i) $-3+\sqrt{3}i$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.3)

1.6.4. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át kanonikus alakba ezeket:

(a) $2(\cos 0 + i\sin 0)$, (b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$, (c) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$,
(d) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, (e) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$, (f) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$,
(g) $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.4)

Kidolgozott feladat. Trigonometrikus (vagy exponenciális) alakkal számolva határozzuk meg az $(1-i)^{2022}$ komplex számot kanonikus alakban.

Megoldás. Az $1-i$ komplex szám abszolútértéke $\sqrt{2}$, tehát

$$\begin{aligned}
(1-i)^{2022} &= \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{2022} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^{2022} = \\
&= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{2022} = (\sqrt{2})^{2022}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{2022} = \\
&= 2^{1011}\left(\cos\frac{2022\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{2022\cdot 7\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Ez már trigonometrikus alak, de a szöge nincsen 0 és 2π között, ezért a kanonikus alakra váltáshoz fel kell használnunk a cos és sin függvények 2π-periodicitását. Mivel $\frac{2022\cdot 7}{4} = 3538,5 = 3538 + \frac{1}{2}$ (és 3538 páros), ezért a fenti számolást befejezhetjük:

$$2^{1011}\left(\cos\frac{2022\cdot 7\pi}{4}+i\sin\frac{2022\cdot 7\pi}{4}\right)=2^{1011}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2^{1011}(0+1i)=2^{1011}i.$$

1.6.5. Feladat. Trigonometrikus vagy exponenciális alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét, majd adjuk meg az eredmény kanonikus alakját is:

(a) $(\sqrt{3}-i)(2-2\sqrt{3}i)$, (b) $(-2-2i)(-5+5i)$, (c) i^{14},
(d) $(\sqrt{3}-i)^{67}$, (e) $(1+i)^{1222}$, (f) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.5)

1.6.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

(a) $\sqrt{9}$, (b) $\sqrt{-4}$, (c) $\sqrt{i}$,
(d) $\sqrt{-16i}$, (e) $\sqrt{-15+8i}$, (f) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$,
(g) $\sqrt[3]{-8}$, (h) $\sqrt[3]{-8i}$, (i) $\sqrt[3]{-8+8i}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.6)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az x^4+x^2-6 polinom gyökeit, gyöktényezős felbontását.

Megoldás. Vegyük észre, hogy a vizsgálandó polinom olyan, hogy $y=x^2$ helyettesítéssel az y^2+y-6 polinomot kapjuk, mely másodfokú, így könnyen tudjuk kezelni. Határozzuk meg ennek a gyökeit:

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=2 \quad \text{és} \quad -3.$$

tehát $y^2+y-6=(y-2)(y-(-3))$, melybe az $y=x^2$ összefüggést visszahelyettesítve $x^4+x^2-6=(x^2-2)(x^2+3)$ adódik. A kapott tényezők másodfokúak, az első gyökei $\pm\sqrt{2}$, a második polinom gyökei, azaz az $x^2+3=0$ egyenlet megoldásai a $\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$.
Azaz a gyökök $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}i$, és $-\sqrt{3}i$. A gyöktényezős felbontás pedig

$$(x-\sqrt{2})(x-(-\sqrt{2}))(x-\sqrt{3}i)(x-(-\sqrt{3}i))=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i).$$

1.6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezős felbontásukat is.

(a) x^2+1, (b) $x^2+6x+10$, (c) $x^2+2ix-1$,
(d) x^3+8, (e) x^4+9x^2, (f) x^4-16,
(g) x^4+18x^2+81.

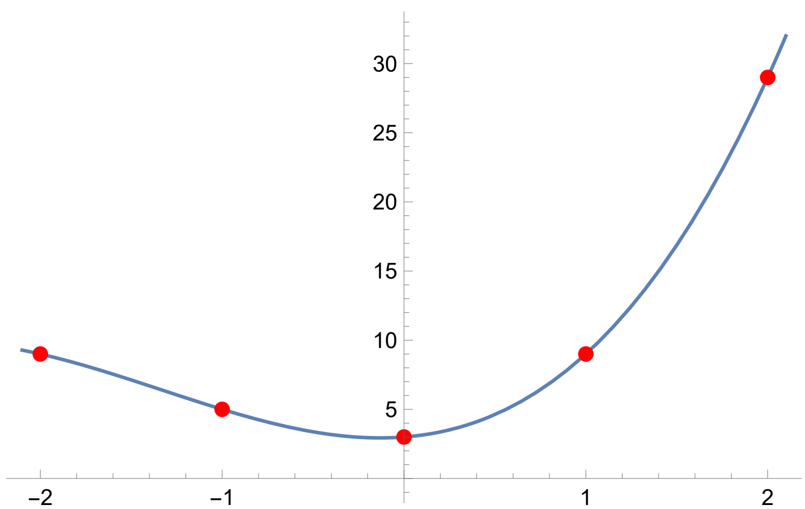
($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.7)

Kidolgozott feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek az $A(-2,9)$, $B(-1,5)$, $C(0,3)$, $D(1,9)$ és $E(2,29)$ pontok.

Megoldás. Először határozzuk meg az L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 polinomokat. A feladatban: $c_0 = -2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$ és $d_0 = 9$, $d_1 = 5$, $d_2 = 3$, $d_3 = 9$, $d_4 = 29$. Ezért

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}{(c_0-c_1)(c_0-c_2)(c_0-c_3)(c_0-c_4)} = \frac{1}{24}(x+1)x(x-1)(x-2),\\
L_1 &= \frac{(x-c_0)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}{(c_1-c_0)(c_1-c_2)(c_1-c_3)(c_1-c_4)} = -\frac{1}{6}(x+2)x(x-1)(x-2),\\
L_2 &= \frac{(x-c_0)(x-c_1)(x-c_3)(x-c_4)}{(c_2-c_0)(c_2-c_1)(c_2-c_3)(c_2-c_4)} = \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2),\\
L_3 &= \frac{(x-c_0)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_4)}{(c_3-c_0)(c_3-c_1)(c_3-c_2)(c_3-c_4)} = -\frac{1}{6}(x+2)(x+1)x(x-2),\\
L_4 &= \frac{(x-c_0)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}{(c_4-c_0)(c_4-c_1)(c_4-c_2)(c_4-c_3)} = \frac{1}{24}(x+2)(x+1)x(x-1),
\end{aligned}$$

így egy, a feladat feltételeinek eleget tévő polinom az $L = d_0L_0 + d_1L_1 + d_2L_2 + d_3L_3 + d_4L_4 = x^3 + 4x^2 + x + 3$. (Ld. 1.1. ábra.)



1.1. ábra. Az A, B, C, D, E pontok és az L polinom

1.6.8. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

(a) $A(-1,1)$, $B(2,4)$, $C(3,9)$,
(b) $A(1,3)$, $B(2,8)$, $C(4,12)$,
(c) $A(-1,2)$, $B(0,0)$, $C(1,4)$, $D(4,0)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.8)

1.7. Mátrixok, determinánsok & Mátrixok sajátértékei

Kidolgozott feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az AB és az $2AB^T + C^T$ mátrixokat.

Megoldás. Fontos fejben tartanunk, hogy a mátrixműveletek nem minden esetben végezhetőek el. Az AB szorzással gond is van, ugyanis egy (2×2)-es mátrix összeszorzását kéri egy (3×2)-essel. Ez nem végezhető el. A második kifejezés azonban elvégezhető.
Milyen sorrendben végezzük a mátrixműveleteket egy bonyolultabb kifejezésben, mint mondjuk a feladatban lévő második? Pontosan olyan sorrendben, mint ahogy számoknál megszoktuk algebrából: először a kitevőkben jelölt műveleteket (beleértve a transzponlást) végezzük el, majd a szorzásokat, végül az összeadásokat.
A transzponálásra talán úgy a legkönnyebb gondolni, hogy a sorokból oszlopok lesznek, tehát

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Végezzük most el az AB^T mátrixszorzást. A definíció alapján

$$\begin{aligned} AB^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) & 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A számmal való szorzást elemenként végezzük, azaz

$$2AB^T = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 14 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Mátrixok összeadását szintén elemenként végezzük, tehát

$$2AB^T + C^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 14 & -8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 17 & -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.7.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat:

(a) $A + B$, (b) $3A$, (c) B^T,

(d) BC, (e) CA.

(⇝ eredmény: 2.7.1)

1.7.2. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:

(a) $2A$, (b) $A+B$, (c) $B+C^T$,
(d) BA, (e) BC, (f) CB,
(g) $AB+2C^T$.

(⇝ eredmény: 2.7.2)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a következő determinánst.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -10 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 \end{vmatrix}$$

Megoldás. Átalakításokkal dolgozunk, a 2. sort nullázzuk ki az 1. elemével

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -10 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 \end{vmatrix} \underset{O_3+3\times O_1}{\overset{O_2-O_1}{=}} \begin{vmatrix} -3 & 5 & -12 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 14 & -4 \end{vmatrix} \underset{\text{2. sor}}{\overset{\text{kifejtés}}{=}} 1\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 5 & -12 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & 14 & -4 \end{vmatrix} \underset{S_3+2\times S_1}{\overset{S_2-S_1}{=}}$$

$$(-1)\cdot \begin{vmatrix} 5 & -12 & 2 \\ -3 & 11 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. oszlop}}{\overset{\text{kifejtés}}{=}} (-1)\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 50$$

1.7.3. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, (f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, (h) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

(⇝ eredmény: 2.7.3)

1.7.4. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.4)

1.7.5. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

egyenlőség.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.5)

1.7.6. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.6)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

Megoldás. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinomot a

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 7 \\ 0 & 5-x & 0 \\ 7 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

deterimáns (a főátlóban kivonunk x-et) kiszámításával kapjuk. Általában egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomja n-edfokú. Ez már 3×3-as esetben is megnehezítheti a gyökök kiszámítását, hiszen a harmadfokú egyenleteket nehéz megoldani. Ezért az ilyen determinánsok kiszámításánál arra kell törekedni, hogy az eredményt minél inkább szorzat alakban kapjuk. Jelen determinánsunkat csak akkor kapjuk szorzatalakban, hogyha a második sor vagy oszlop szerint fejtünk ki. Ekkor kapjuk:

$$(5-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 7 \\ 7 & 3-x \end{vmatrix} = (5-x)((3-x)^2 - 49),$$

mely második tényezője másodfokú, így, például, a jól ismert megoldóképlettel megkereshetők gyökei: -4 és 10. Mivel az első tényezőből $x = 5$ adódik, így a mátrix három sajátétéke: -4, 5 és 10.

1.7.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(Ld. **1.8.6. Feladat**.)

(⇝ eredmény: 2.7.7)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A megoldáshoz a kiindulási mátrixunk mellé írjuk az egységmátrixot:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Célunk — melyet Gauss-eliminációval fogunk elérni —, hogy a bal oldalon megjelenjen az egységmátrix. Ekkor a jobb oldalon a keresett inverz lesz. Először lefelé nullázunk.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_3+3\times S_1}{\overset{S_2-2\times S_1}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_3-3\times S_2}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Lefelé készen vagyunk a nullázással, most felfele is nullázunk, hogy csak a főátlóban maradjanak nemnulla elemek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{S_1-2\times S_3}{\overset{S_2+2\times S_3}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\times S_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

A keresett inverz tehát

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 6 & -2 \\ 16 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definíció szerint $AA^{-1} = E$, így a szorzat kiszámolásával könnyen ellenőrizhetjük, hogy helyes-e az eredmény.

1.7.8. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét Gauss-elimináció segítségével:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.8)

1.7.9. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $(n \times n)$-es mátrixok esetén?

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$, (b) $(AB)^T = A^T B^T$,
(c) $A^n A^m = A^{nm}$, (d) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.9)

1.8. Lineáris egyenletrendszerek & Vektorterek

Kidolgozott feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \\ -3x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 11x_4 & = & -8 \end{array}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer bővített mátrixával fogunk számolni, mely együtthatóiból áll:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -3 & -6 & 5 & -11 & -8 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminációt fogunk végezni, azzal a céllal, hogy végül minden (kivéve az elsőt) sor több nullával kezdődjön, mint a fölötte lévő. Az első oszlopot tekintve úgy tűnhet, hogy törtekkel kell majd számolnunk, mely könnyen elszámoláshoz vezethet. Ez azonban jelen esetben kétféleképpen is elkerülhető. A két módszer közül az egyik általános(abb), azaz (szinte) mindig alkalmazható (feltéve, hogy racionális számokból áll a mátrixunk).
Az ad hoc módszer annak az észrevételén alapul, hogy mátrixunk első sorának elemei mindannyian oszthatóak kettővel. Az első sor 2-vel való osztása tehát nem vezet ki az egész számok komfortos köréből. Ezután a bal felső elem -1 lesz, mellyel könnyen nullázhatjuk az alatta lévő elemeket. Vegyük észre, hogy ez meglehetősen esetleges volt, ugyanis általában semmi nem garantálja, hogy az első (vagy akármelyik) sort hasonlóan leoszthatjuk – az egész számok körében maradva. Ez a tény okot ad arra, hogy általánosabb módszer után nézzünk.
Általában a következőt tehetjük. Azon kinullázandó elemek sorát, melyek kinullázása törtszámokhoz vezetne, felszorozzuk. Úgy, hogy a nullázó és a nullázandó elem legkisebb közös többszöröse jelenjen meg a nullázandó elem helyén. Jelen mátrixunk első oszlopa esetén a -3 kinullázása okozna tört számokat. Mármost 2 és 3 legkisebb közös többszöröse 6, ennélfogva úgy indulunk el, hogy az utolsó sort 2-vel szorozzuk – hogy -6-al kezdődjön.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -3 & -6 & 5 & -11 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{2\times S_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -6 & -12 & 10 & -22 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2+S_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{3\times S_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3+2S_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2/3} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Elértük célunkat, a sorok egyre több 0-val kezdődnek. A sorok első nemnulla elemeihez tartozó változók, azaz x_1 és x_3, a kötött változók, a többi, azaz x_2 és x_4 a szabad változók.

Az egyenleteket alulról felfelé sorra véve kifejezzük a kötött változókat a szabad változók segítségével. A legalsó egyenlet $x_3 - x_4 = 2$, melyből a kötött változót kifejezve $x_3 = 2 + x_4$ adódik. Eggyel feljebb, a $-2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -4$ egyenlet két kötött változót tartalmaz, de ezek közül az egyiket már kifejeztük a szabad változók segítségével. Ezt felhasználva

$$-2x_1 - 4x_2 + 4(2 + x_4) - 8x_4 = -4$$

adódik, melyből $x_1 = 6 - 2x_2 - 2x_4$.
Összegezve, a megoldást:

$$x_2, x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 6 - 2x_2 - 2x_4, \quad x_3 = 2 + x_4,$$

vagy vektoros formában

$$(6 - 2x_2 - 2x_4,\ x_2,\ 2 + x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

1.8.1. Feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 24 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 11 \\ -5x_1 - 6x_2 + 13x_3 = -14 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 = 6 \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 11x_4 = -8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} a - b + u = 1 \\ a + c - v = 2 \\ b + v + w = 3 \end{cases}$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.1)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy a

$$(3, 0, 1),\ (1, 2, 3),\ (-1, 0, 1),\ (0, 3, 1)$$

vektorrendszer lineáris független-e, illetve generátorrendszert, bázist alkot-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

Megoldás. Egy vektorrendszer ún. *rangját* megkaphatjuk, ha a vektorrendszert egy mátrix soraiba írjuk, majd lépcsős alakra hozzuk a mátrixot Gauss-eliminációval. Az így kapott mátrixban a (nemnulla) sorok száma a vektorrendszer *rangja*. A rangból már minden (a feladat által feltett) kérdésre válaszolhatunk, ugyanis a vektorrendszer

- lineárisan független $\iff$ rang = vektorrendszer eredeti elemszáma (azaz hány darab vektor volt eredetileg), jelen feladatban 4;
- generátorrendszer $\iff$ rang = vektortér dimenziója (azaz hány komponensűek a vektorok), jelen feladatban 3;
- bázis $\iff$ független és generátorrendszer egyszerre.

Számítsuk ki tehát a vektorrendszerünk rangját!

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sorcsere}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1]{S_2-3S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\times S_4]{3\times S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_2]{S_3+S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A rang tehát 3. Innen vektorrendszerünk:
lineárisan függő, ugyanis $3 \neq 4$;
generátorrendszer, ugyanis $3 = 3$;
nem bázis, ugyanis nem lineárisan független.

1.8.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4)$, $\underline{b} = (1, -2)$,
(b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$,
(c) $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (4, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 0)$,
(d) $\underline{a} = (1, -2, 4)$, $\underline{b} = (2, -3, 1)$, $\underline{c} = (-4, 5, 5)$,
(e) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$, $\underline{c} = (4, 3, -2)$, $\underline{d} = (-1, 4, -3)$,
(f) $\underline{a} = (1, 2, -1)$, $\underline{b} = (3, 1, 4)$, $\underline{c} = (2, 3, -1)$,
(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4)$, $\underline{b} = (0, -3, 1, 2)$, $\underline{c} = (2, -4, 5, 9)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.2)

1.8.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak, a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben, az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (x, -6)$,
(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2)$, $\underline{b} = (-1, 4, -2, -4)$, $\underline{c} = (3, -12, x, 10)$,
(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1)$, $\underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1)$, $\underline{c} = (1, 9, -11, -4, x)$,
(d) $\underline{a} = (1, -1, 2)$, $\underline{b} = (2, -1, -1)$, $\underline{c} = (1, 0, x^2)$, $\underline{d} = (2, -1, x + 4)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.3)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasorát az $(1,0,1)$, $(1,-2,-1)$, $(2,-2,3)$ bázisban.

Megoldás. A koordinátasor meghatározásához meg kell keresnünk azokat az x_1, x_2, x_3 együtthatókat, amelyekre $x_1 \cdot (1,0,1) + x_2 \cdot (1,-2,-1) + x_3 \cdot (2,-2,3) = (1,2,3)$. A beszorzást és az összeadást elvégezve a komponensek egyenlőségéből az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Megfigyelhetjük, hogy a bővített mátrix oszlopai éppen a feladatbeli vektoraink. A lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a koordinátasort, jelen esetben $(x_1, x_2, x_3) = (2,-1,0)$. (A megoldáshoz vezető számítást most nem részleteztük.) A bázis tulajdonságai miatt ezek az együtthatók egyértelműen meghatározhatók, azaz koordinátasor kiszámolásánál a megfelelő lineáris egyenletrendszernek mindig pontosan egy megoldása lesz.

1.8.4. Feladat. Adjuk meg a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasorát az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér megadott bázisában.

(a) $v = (1,-1,2)$, bázis: $(1,2,3), (-1,1,-2), (0,2,1)$,
(b) $v = (2,1,-1)$, bázis: $(-4,-2,2), (1,2,4), (-1,3,9)$,
(c) $v = (1,-1,1)$, bázis: $(1,-1,3), (2,-1,4), (3,-1,4)$,
(d) $v = (6,12,-2)$, bázis: $(3,5,-7), (-5,-3,7), (7,3,5)$,
(e) $v = (1,1,1)$, bázis: $(4,6,7), (-3,5,7), (2,5,6)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.4)

1.8.5. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adjuk meg a megoldástér egy bázisát.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.5)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix $\lambda = 3$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében egy bázist.

Megoldás. A következő homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$(A^T - \lambda E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4-3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3-3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to (1\ \ 0\ \ 1\ \mid\ 0)$$

x_2 és x_3 szabad változók, x_1 kötött, és $x_1 = -x_3$. Végül a szabad változókba a standard bázist helyettesítjük.

x_2	x_3	$(-x_3, x_2, x_3)$
1	0	$(0, 1, 0)$
0	1	$(-1, 0, 1)$

Egy lehetséges bázis tehát: $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$.

1.8.6. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó U_λ sajátalterében egy bázist. (Ld. **1.7.7. Feladat**.)

(a) $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -3$,

(b) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$,

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$,

(e) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$,

(f) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.6)

2. fejezet

Megoldások

2.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei

2.1.1. Feladat. (a) $B \vee C$, (b) $B \wedge (\neg C)$, (c) $\neg A$, (d) $B \to C$, (e) $B \leftrightarrow A$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **1.1. Feladat: (a)–(b) és (e)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.1)

2.1.2. Feladat. Az F formulának nyolc darab részformulája van: A, B, C, $\neg B$, $\neg C$, $(\neg C) \to B$, $A \vee (\neg B)$ és F.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **1.2. feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.2)

2.1.3. Feladat. (c) $A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big)$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.3)

2.1.4. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai az alábbiak.

(a) $(A \vee B) \to (C \wedge D)$
(b) $A \to (\neg B \vee (B \wedge C))$
(c) $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$
(d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
(e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
(f) $(A \wedge B) \to (C \vee D)$
(g) $A \to (B \leftrightarrow \neg C)$
(h) $A \to (\neg B \wedge (\neg C \to \neg D))$
(i) $A \vee (B \wedge C)$
(j) $A \wedge (B \to \neg C)$
(k) $A \to (B \vee (C \wedge B))$

$\rightsquigarrow$ **videók:** **1.4. Feladat: (a)**, **1.4. Feladat: (b),(g) és (h)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.4)

2.1.5. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai és igazságértékei az alábbiak.

(a) $(\neg A \wedge \neg B) \to (C \leftrightarrow D) = h$
(b) $(A \wedge B) \to (C \leftrightarrow (\neg D \vee E)) = i$
(c) $(A \wedge B) \to (C \to (D \vee E)) = h$

$\rightsquigarrow$ **videó:** **1.5. Feladat: (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.5)

2.1.6. Feladat. Az (a) rész igazolása:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(A & \wedge & B) & \rightarrow & C & \equiv & A & \rightarrow & (B & \rightarrow & C) \\
i & i & i & \mathbf{i} & i & & i & \mathbf{i} & i & i & i \\
i & i & i & \mathbf{h} & h & & i & \mathbf{h} & i & h & h \\
i & h & h & \mathbf{i} & i & & i & \mathbf{i} & h & i & i \\
i & h & h & \mathbf{i} & h & & i & \mathbf{i} & h & i & h \\
h & h & i & \mathbf{i} & i & & h & \mathbf{i} & i & i & i \\
h & h & i & \mathbf{i} & h & & h & \mathbf{i} & i & h & h \\
h & h & h & \mathbf{i} & i & & h & \mathbf{i} & h & i & i \\
h & h & h & \mathbf{i} & h & & h & \mathbf{i} & h & i & h
\end{array}$$

A feladat többi részét is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanazt a logikai értéket kapjuk-e.

⇝ **videók:** **1.6. Feladat: (a)**, **1.6. feladat: (b)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.6)

2.1.7. Feladat. (a) (1): $(\neg A \vee B) \rightarrow C$
(2): $(\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
(1) $\equiv$ (2)
(b) (1): $A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$
(2): $(B \vee C \vee A) \wedge ((\neg B \vee \neg C) \rightarrow \neg A)$
(1) $\not\equiv$ (2)
(c) (1): $\neg A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$
(2): $(A \vee \neg C \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$
(1) $\equiv$ (2)

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.7)

2.1.8. Feladat. (a) Nem tautológia. (b) Tautológia. (c) Nem tautológia. (d) Tautológia. (e) Tautológia. (f) Tautológia. (g) Tautológia.

⇝ **videók:** **1.8. Feladat: (a)**, **1.8. Feladat: (b)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.8)

2.1.9. Feladat. Az F_1 formula (nem teljes) diszjunktív normálforma, az F_2 : formula nem diszjunktív normálforma, az F_3 formula teljes diszjunktív normálforma, az F_4 formula teljes diszjunktív normálforma.

⇝ **videó:** **1.9. Feladat**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.9)

2.1.10. Feladat. A TDNF-ek az alábbiak:

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$,
(b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$,
(c) $(A \vee B) \rightarrow \big(\neg(C \rightarrow B)\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$,

(d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$,

(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B)) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$,

(f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **1.10. Feladat: (a)**, **1.10. Feladat: (c)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.1.10)

2.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei

2.2.1. Feladat. A „fordítás” eredményei az alábbiak.

(a) A 7 páros szám.
(b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
(c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
(d) A 6-nak létezik páros osztója.
(e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
(f) Két egész szám összege pontosan akkor páros, ha a szorzatuk is az.
(g) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
(h) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha legalább az egyik páratlan.
(i) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **2.1. feladat: (a)–(b) és (d)–(g)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.1)

2.2.2. Feladat. A zárt formulák igazságértéke:

(a) igaz,	(b) hamis,	(c) hamis,	(d) hamis,
(e) igaz,	(f) hamis,	(g) igaz,	(h) igaz,
(i) hamis,	(j) igaz,	(k) igaz,	(l) hamis.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **2.2. feladat: (a), (e)–(f) és (i)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.2)

2.2.3. Feladat. Pirossal jelölve a kötött előfordulást, zölddel a szabad előfordulást:

(a) $(\forall x)(K(x,y) \lor L(x))$,
(b) $(\exists y)(I(s(x,y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x,y)))$,
(c) $M(k(x,b),x) \land (\exists z)(M(y,k(z,a)))$,
(d) $(\forall x)\, P\,(f\,(x,a)\,,x) \to (\exists y)\,(P\,(f\,(y,x)\,,y) \land Q\,(x))$

$\rightsquigarrow$ **videó:** **2.3. feladat: (a)–(c)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.3)

2.2.4. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai az alábbiak.

(a) $(\exists x)(H(x) \land \neg V(x))$
(b) $(\forall x)(H(x) \to V(x))$
(c) $(\exists x)(H(x) \land \neg(\exists y)B(y,x))$
(d) $(\exists x)(H(x) \land (\forall y)(T(y,x) \to C(y,x)))$
(e) $(\exists x)(F(x) \land \neg(\exists y)(\neg F(y) \land T(y,x)))$
(f) $(\forall x)\,(A\,(x) \to \neg F\,(x)) \land (\exists x)\,(\neg F\,(x) \land \neg A\,(x))$
(g) $(\forall x)\,(B\,(x,p) \to H\,(x))$
(h) $(\exists x)\,(H\,(x) \land (\neg S\,(a\,(x))))$
(i) $S\,(a\,(p))$

⇝ **videók:** **2.4. feladat: (a)–(c)**, **2.4. feladat: (f) és (i)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.4)

2.2.5. Feladat. Predikátumok: $O(x,y)$: „x osztja y-t”, $N(x)$: „x nullára végződik”, $P(x)$: „x pozitív”, $K(x,y)$: „x kisebb y-nál”.
Függvények: $f(x)$: „x négyzete”.

(a) $(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))$
$\neg\left[(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))\right] \equiv (\exists x)(\neg O(1,x) \vee \neg O(x,x))$

(b) $(\forall x)(\exists y)K(y,x)$
$\neg\left[(\forall x)(\exists y)K(y,x)\right] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y,x)$

(c) $(\forall x)(O(10,x) \to N(x))$
$\neg\left[(\forall x)(O(10,x) \to N(x))\right] \equiv (\exists x)(O(10,x) \wedge \neg N(x))$

(d) $(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))$
$\neg\left[(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))\right] \equiv (\forall x)(\neg K(x,0) \vee \neg P(f(x)))$

(e) $(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))$
$\neg\left[(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))\right] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x,0))$

⇝ **videó:** **2.5. feladat: (a) és (c)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.5)

2.2.6. Feladat. Individuumkonstansok: m: „Mézga Géza”.
Predikátumok: $I(x)$: „x informatikus”, $E(x)$: „x éhes”, $S(x)$: „x szakács”, $K(x,y)$: „x kedveli y-t”, $F(x,y)$: „x főz y-nak”, $Sz(x)$: „x szerencsés”, $G(x,y)$: „x gyermeke y-nak”.
Függvények: $g(x)$: „x gyereke”.

(a) $(\forall x)(I(x) \to E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*

(b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \to F(x,x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x,x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*

(c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \to (\forall y)(S(y) \to K(x,y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x,y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*

(d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x,y) \to I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \to (\exists y)(F(x,y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*

(e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y)) \to K(x,y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x,y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*

(f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \to Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x,m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*

(g) $(S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x)) \to (\forall x)Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x) \wedge (\exists x)\neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

⇝ **kidolgozott feladat (pdf):** **2.6. feladat: (a) és (e)–(f)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.6)

2.3. Halmazok

2.3.1. Feladat. A halmazok a következők:

(a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\} = U$,
(b) $A \cap B = \{d\}$,
(c) $\overline{B} = \{a, b, c\}$,
(d) $A \setminus B = \{a, b, c\}$,
(e) $A \triangle B = \{a, b, c, e\}$,
(f) $\left(A \triangle \overline{C}\right) \setminus \overline{B} = \emptyset$,
(g) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}\}$.

$\rightsquigarrow$ **videó: 3.1. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.1)

2.3.2. Feladat. Mivel

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad \text{és} \quad B = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\},$$

ezért

(a) $A \cup B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,
(b) $A \cap B = \{\emptyset, \{b\}\}$,
(c) $A \setminus B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$,
(d) $B \setminus A = \{\{c\}, \{b, c\}\}$,
(e) $A \triangle B = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.

$\rightsquigarrow$ **videó: 3.2. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.2)

2.3.3. Feladat.

(a) Igaz, (b) igaz, (c) igaz, (d) igaz,
(e) hamis, (f) igaz, (g) igaz, (h) igaz.

$\rightsquigarrow$ **videó: 3.3. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.3)

2.3.4. Feladat. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\rightsquigarrow$ **videó: 3.4. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.4)

2.3.5. Feladat.

(a) Igen, (b) igen, (c) nem, (d) nem,
(e) nem, (f) nem.

$\rightsquigarrow$ **videó: 3.5. Feladat: (a), (c) és (e)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.5)

2.3.6. Feladat.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7\}\}$,
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}$,
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6,7\}\}$,
(d) nem osztályozás,
(e) nem osztályozás,
(f) nem osztályozás.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.6. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.6)

2.3.7. Feladat.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$,
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$,
(c) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$,
(d) $A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$,
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **3.7. Feladat: (a)**, **3.7. Feladat: (b)**, **3.7. Feladat: (e)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.7)

2.3.8. Feladat. $\overline{A \cup (B \cap (C \cup D))} = \overline{A} \cap \left(\overline{B} \cup \left(\overline{C} \cap \overline{D}\right)\right)$

$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.8. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.8)

2.3.9. Feladat. $A \subseteq B$ teljesül, $A = B$ és $B \setminus A = \emptyset$ nem teljesül.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.9. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.9)

2.3.10. Feladat.

(a)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \cup (B \cap D) &\iff x \in (A \cup (B \cap D)) \cap (C \cup (B \cap D)) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup D) \cap (C \cup B) \cap (C \cup D) \\ &\implies x \in (A \cup B) \cap (C \cup D) \end{aligned}$$

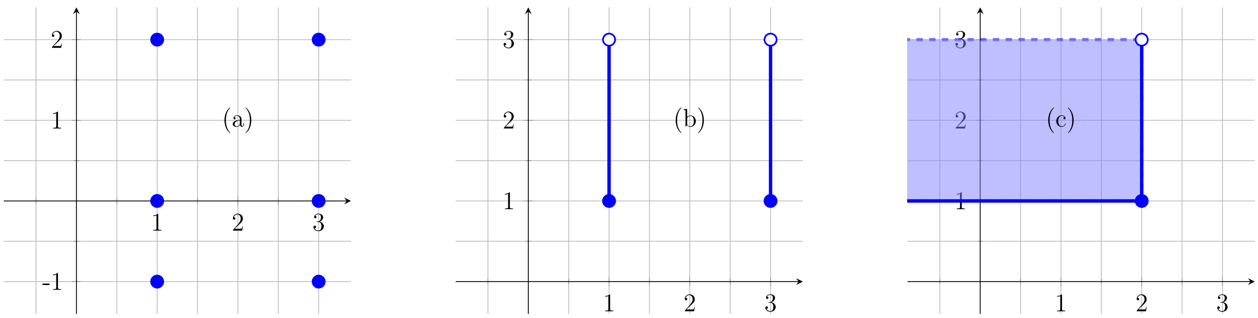
(b)

$$\begin{array}{lll} & & x \in C \cup D \Longrightarrow x \notin B \cap \overline{(C \cup D)} = B \setminus (C \cup D) \\ & \nearrow & \\ x \in A \cap C \cap D & & \\ & \searrow & \\ & & x \in A \cap C \\ \Longrightarrow & x \in & (A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.10. Feladat: (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.10)

2.3.11. Feladat.



$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.11. Feladat: (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.11)

2.3.12. Feladat.

(a) Igen,
(b) igen,
(c) nem,
(d) nem.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **3.12. Feladat (1.rész)**, **3.12. Feladat (2.rész)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.12)

2.4. Relációk

2.4.1. Feladat.

(a) $\alpha \cap \beta = \{(1,2),(3,2)\}$,
(b) $\alpha \setminus \beta = \{(3,4),(4,4),(5,5)\}$,
(c) $\alpha^{-1} = \{(2,1),(2,3),(4,3),(4,4),(5,5)\}$,
(d) $\alpha\beta = \{(1,2),(3,2),(3,3),(3,5),(4,3),(4,5)\}$,
(e) $\beta\alpha = \{(4,2),(4,4),(4,5)\}$,
(f) $\beta\alpha^{-1} = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(4,5)\}$,
(g) $\beta \cap \alpha^{-1} = \{(4,3)\}$.

$\rightsquigarrow$ **videó: 4.1. Feladat**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.1)

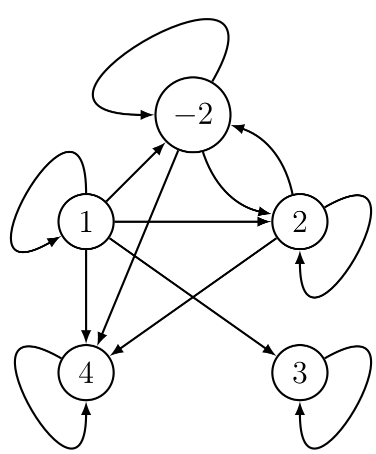
2.4.2. Feladat.

(a) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{E}^2 : \ x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$,
$\alpha\beta = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \ y \text{ az } x \text{ nagyapja}\}$,
$\beta\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \ y \text{ az } x \text{ apai nagyszülője}\}$,
(b) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2y\}$,
$\alpha\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2^{y+1}\}$,
$\beta\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 4^y\}$,
(c) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$,
$\alpha\beta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = \frac{y-1}{3}\right\}$,
$\beta\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (3x+1)^2 = y\right\}$.

$\rightsquigarrow$ **videó: 4.2. Feladat: (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.2)

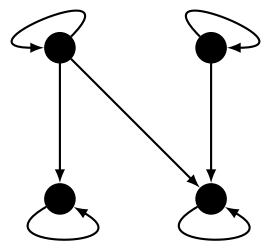
2.4.3. Feladat. A ρ reláció reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom.



⇝ **videó: 4.3. Feladat**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.3)

2.4.4. Feladat. (a)–(b)



(c) Nincs ilyen gráf, minden dichotom reláció reflexív.

⇝ **videó: 4.4. Feladat: (a)–(c)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.4)

2.4.5. Feladat.

	Refl.	Szimm.	Antiszimm.	Tranz.	Dich.	Ekv.	R.r.
(a)	✓	✓	×	×	×	×	×
(b)	✓	×	✓	✓	✓	×	✓
(c)	×	×	✓	✓	×	×	×
(d)	✓	✓	×	×	×	×	×
(e)	✓	×	×	✓	✓	×	×
(f)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(g)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(h)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(i)	×	×	✓	✓	×	×	×
(j)	✓	✓	×	✓	×	✓	×

⇝ **videók: 4.5. Feladat: (a), 4.5. Feladat: (c), 4.5. Feladat: (g)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.5)

2.4.6. Feladat.
$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$
$\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5),(4,4)\}$

⇝ **videó: 4.6. Feladat**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.6)

2.4.7. Feladat.

(a) $\{\{-3,-2,-1\},\ \{1,2,3\}\}$
(b) $\{\{-3,0,3\},\ \{-2,1\},\ \{-1,2\}\}$
(c) $\{\{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\},\{0\}\},\ \{\{1,2\},\{a,b\}\},\ \{\{1,2,3\}\}\}$

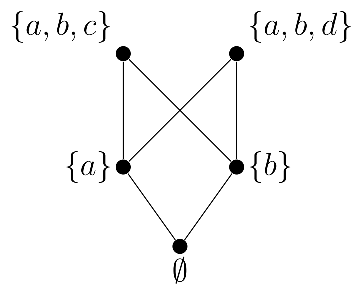
(d) $\{\{2, 8, 14, 26\},\ \{3, 9, 15\},\ \{19\}\}$
(e) $\{\{71, 602\},\ \{301, 4, 121\},\ \{216, 54, 315\}\}$
(f) $\{\{0\},\ \{-1, 1\},\ \{-2, 2\},\ \{-3, 3\},\ \ldots\} = \{\{a, -a\} : a \in \mathbb{Z}\}$
(g) $\{\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\},\ \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}\}$

⇝ **videó:** **4.7. Feladat: (a), (c) és (d)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.7)

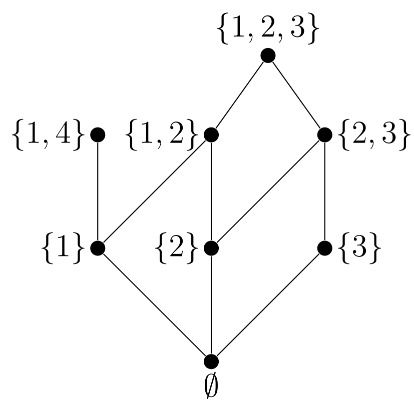
2.4.8. Feladat.

(a)



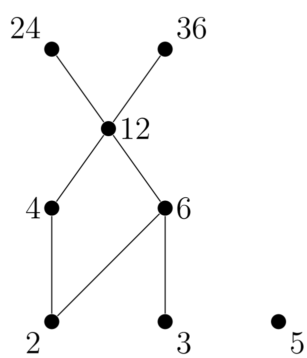
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $\emptyset$.
Maximális elemek: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$.
Minimális elem: $\emptyset$.

(b)



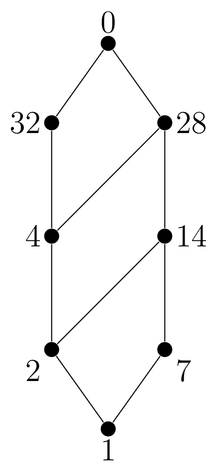
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $\emptyset$.
Maximális elemek: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4\}$.
Minimális elem: $\emptyset$.

(c)



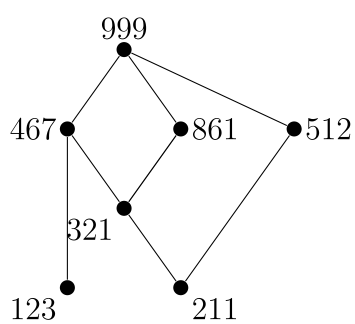
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: nincs.
Maximális elemek: 24, 36, 5.
Minimális elemek: 2, 3, 5.

(d)



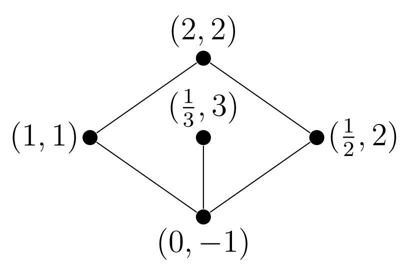
Legnagyobb elem: 0.
Legkisebb elem: 1.
Maximális elem: 0.
Minimális elem: 1.

(e)



Legnagyobb elem: 999.
Legkisebb elem: nincs.
Maximális elem: 999.
Minimális elemek: 123, 211.

(f)

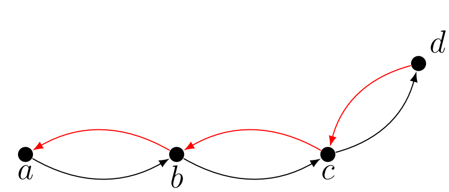


Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $(0, -1)$.
Maximális elemek: $(2, 2)$, $(\frac{1}{3}, 3)$.
Minimális elem: $(0, -1)$.

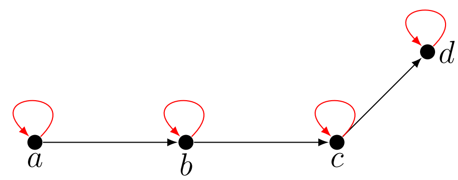
$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{4.8. Feladat: (a) és (c)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.8)

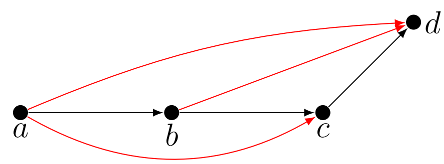
2.4.9. Feladat.
Szimmetrikus lezárt:



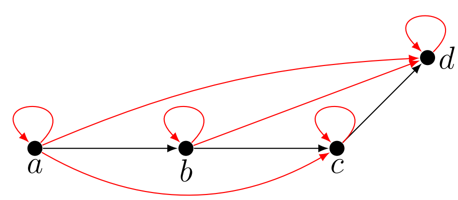
Reflexív lezárt:



Tranzitív lezárt:



Reflexív és tranzitív lezárt:

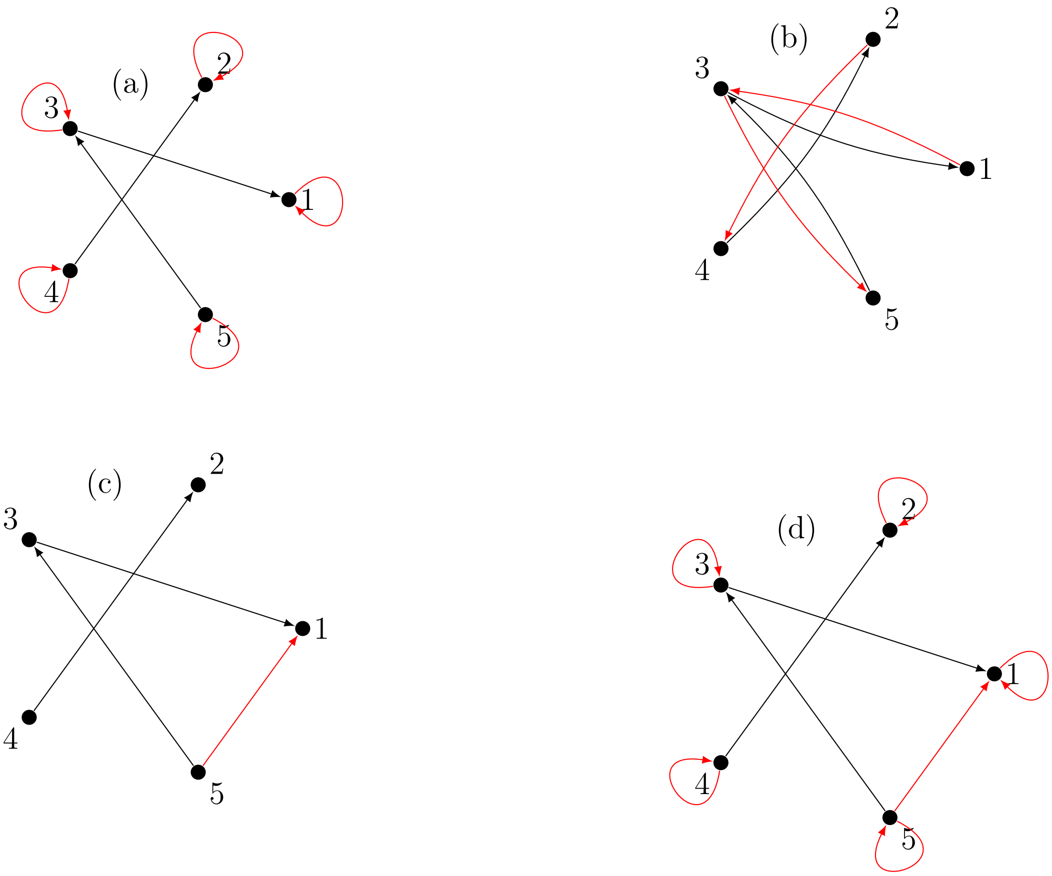


⇝ **videó:** **4.9. Feladat**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.9)

2.4.10. Feladat.

(a) ρ reflexív lezártja: $\{(4,2),(3,1),(5,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
(b) ρ szimmetrikus lezártja: $\{(a,b)\colon |a-b|=2\}$
(c) ρ tranzitív lezártját: $\rho^+ = \rho \cup \{(5,1)\}$
(d) ρ reflexív és tranzitív lezártja: $\rho^* = \{(4,2),(3,1),(5,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,1)\}$



⇝ **videó:** **4.10. Feladat**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.10)

2.4.11. Feladat.

(a) $\rho^+ = \{(a,b) \in A^2 : |a-b| \text{ páros}\}$, ahol $A = \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\tau^+ = \tau$
(c) $\alpha^+ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (\exists k \in \mathbb{Z}^+)(b = a^{2^k})\}$
(d) $\beta^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\exists k \in \mathbb{Z}^+)(y - x = k)\}$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.4.11)

2.5. Leképezések & Halmazok számossága

2.5.1. Feladat.

(a) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2 + 1$
$\beta\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (3x+1)^2$
(b) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3^{2^x - 2}$
$\beta\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{3^{x-1}} - 1$
(c) $\alpha\beta\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1\right)$
$\beta\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x - \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ **videó: 5.1. Feladat: (c)**

$\rightsquigarrow$ **kidolgozott feladat (pdf): 5.1. Feladat: (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.1)

2.5.2. Feladat.

(a) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(b) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(c) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(d) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(e) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(f) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(g) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(h) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(i) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(j) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.

$\rightsquigarrow$ **videók: 5.2. Feladat: (a) és (b), 5.2. Feladat: (e), 5.2. Feladat: (h)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.2)

2.5.3. Feladat.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x\beta = x^2$
(c) $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x\gamma = x^2$
(d) $\delta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert például a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.
A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert például $(-4)\beta = 4\beta$.
A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert mert például a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.
A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most $\mathbb{R}^+$. Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.3)

2.5.4. Feladat. (a) Tegyük fel, hogy $x_1\alpha = x_2\alpha$. Ekkor

$$x_1\alpha = x_2\alpha \iff 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \iff 3x_1 = 3x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén, ha az $y = 3x-1$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és így $\frac{y+1}{3} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\alpha^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x_1\beta = x_2\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\beta = x_2\beta &\iff (x_1+2)^2 - 4 = (x_2+2)^2 - 4 \\ &\iff (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2 \\ &\iff |x_1+2| = |x_2+2| \\ &\iff x_1+2 = x_2+2 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (x+2)^2 - 4$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és így $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\beta^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

(c) Tegyük fel, hogy $x_1\gamma = x_2\gamma$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\gamma = x_2\gamma &\iff (2x_1+1)^2 - 1 = (2x_2+1)^2 - 1 \\ &\iff (2x_1+1)^2 = (2x_2+1)^2 \\ &\iff |2x_1+1| = |2x_2+1| \\ &\iff 2x_1+1 = 2x_2+1 \\ &\iff 2x_1 = 2x_2 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (2x+1)^2 - 1$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \in \mathbb{R}^+$ és így $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\gamma^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-1}{2}.$$

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{5.4. Feladat: (b)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.4)

2.5.5. Feladat.

(a) $\alpha\colon (0;1) \to (-2;3),\ x\alpha = 5x - 2$
(b) $\beta\colon (1;6) \to (4;7),\ x\beta = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
(c) $\gamma\colon (0;1) \to \mathbb{R},\ x\gamma = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$
(d) $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+},\ x\delta = 2^{x}$

$\rightsquigarrow$ **videó:** **5.5. Feladat: (b)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.5)

2.5.6. Feladat.

(a) Igen,	(b) igen,	(c) nem,
(d) igen,	(e) nem,	(f) igen,
(g) igen,	(h) nem,	(i) nem.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **5.6. Feladat: (a)–(b) és (d)**, **5.6. Feladat: (f)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.6)

2.5.7. Feladat.

(a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.
(b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.
(c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.7)

2.6. Komplex számok & Polinomok

2.6.1. Feladat.

(a) $-i$, (b) -1, (c) $41-11i$, (d) $17-2i$,
(e) $-15-5i$, (f) $-\frac{11}{17}+\frac{27}{17}i$, (g) $-\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$, (h) $\frac{11}{10}-\frac{23}{10}i$,
(i) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}i$.

⇝ **videók:** **6.1. Feladat: (a)–(e)**, **6.1. Feladat: (f)–(i)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.6.1)

2.6.2. Feladat.

(a) $z=4+3i$;
(b) $z=-\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$;
(c) $z_1=-2-\frac{3}{2}i$, $z_2=2+\frac{3}{2}i$;
(d) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;
(e) $z_1=-1-4i$, $z_2=1+4i$;
(f) $z_1=3-2i$, $z_2=-3+2i$.

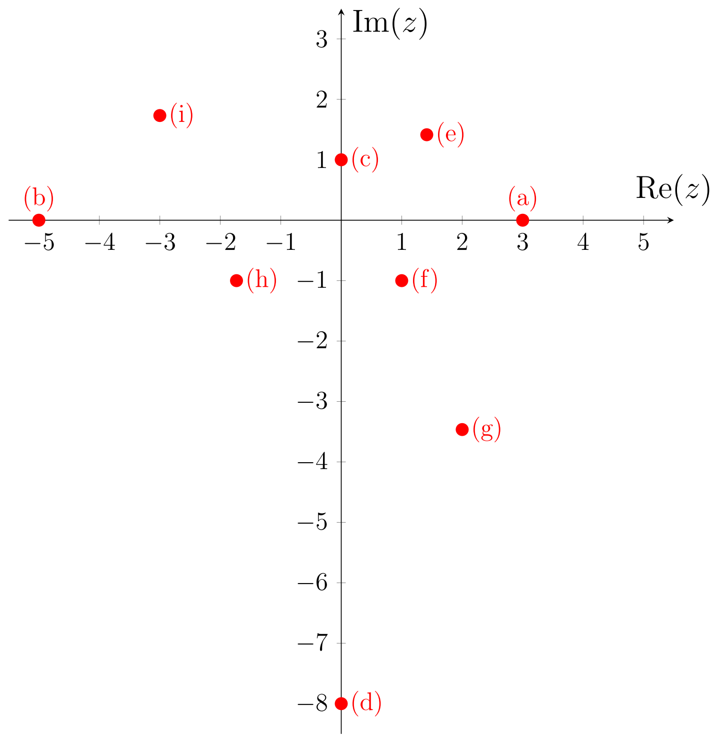
⇝ **videó:** **6.2. Feladat: (a), (c) és (e)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.6.2)

2.6.3. Feladat.

(a) $3=3\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)=3e^{0}$,
(b) $-5=5\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=5e^{\pi i}$,
(c) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$,
(d) $-8i=8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2})=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$,
(e) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})=2e^{\frac{\pi}{4}i}$,
(f) $1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$,
(g) $2-2\sqrt{3}i=4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{3})=4e^{\frac{5\pi}{3}i}$,
(h) $-\sqrt{3}-i=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$,
(i) $-3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6})=2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

⇝ **videók:** **6.3. Feladat (a), (c) és (f)**, **6.3. Feladat: (h)**



(⇝ vissza a feladathoz: 1.6.3)

2.6.4. Feladat.

(a) $2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$

(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i} = -3i,$

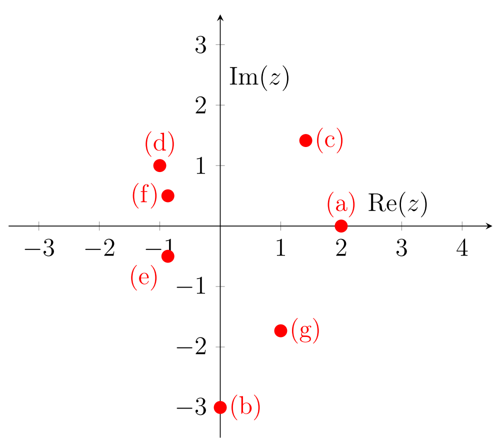
(c) $2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$

(d) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i,$

(e) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$

(f) $e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$

(g) $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i.$



⇝ **videók:** **6.4. Feladat: (a)–(b)**, **6.4. Feladat: (d) és (f)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.6.4)

2.6.5. Feladat.

(a) $8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2})=-8i$,
(b) $20(\cos 0+i\cdot\sin 0)=20$,
(c) $\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1$,
(d) $2^{67}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6})=-2^{66}\sqrt{3}+2^{66}i$,
(e) $2^{611}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2})=-2^{611}i$,
(f) $6^{1526}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})=-3\cdot 6^{1525}+3\sqrt{3}\cdot 6^{1525}i$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **6.5. Feladat: (a)**, **6.5. Feladat: (d)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.5)

2.6.6. Feladat.

(a) $3=3(\cos 0+i\sin 0)$, $-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$,
(b) $2i=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, $-2i=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$,
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$,
(d) $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=4(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$, $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i=4(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$,
(e) $-1-4i$, $1+4i$,
(f) $\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$, $-\sqrt{3}-i=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$
(g) $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$, $1+\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $1-\sqrt{3}i=2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$,
(h) $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$,
(i) $\sqrt{2}\sqrt[6]{2}+\sqrt{2}\sqrt[6]{2}i=2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **6.6. Feladat: (b)**, **6.6. Feladat: (h)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.6)

2.6.7. Feladat.

(a) $x_1=-i$, $x_2=i$
$x^2+1=(x+i)(x-i)$
(b) $x_1=-3-i$, $x_2=-3+i$
$x^2+6x+10=(x+3+i)(x+3-i)$
(c) $x_{1,2}=-i$
$x^2+2xi-1=(x+i)^2$
(d) $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}i$, $x_3=1-\sqrt{3}i$
$x^3+8=(x+2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$
(e) $x_{1,2}=0$, $x_3=-3i$, $x_4=3i$
$x^4+9x^2=x^2(x+3i)(x-3i)$
(f) $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_2=-2i$, $x_3=2i$
$x^4-16=(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$
(g) $x_{1,2}=-3i$, $x_{3,4}=3i$
$x^4+18x^2+81=(x+3i)^2(x-3i)^2$

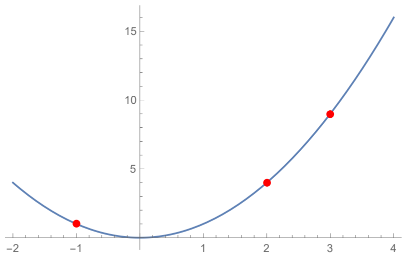
$\rightsquigarrow$ **videó:** **6.7. Feladat: (b) és (g)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.7)

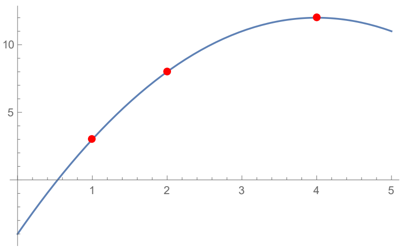
2.6.8. Feladat. (a) x^2, (b) $-x^2+8x-4$, (c) $-\frac{13}{15}x^3+3x^2+\frac{28}{15}x$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **6.8. Feladat: (b)**

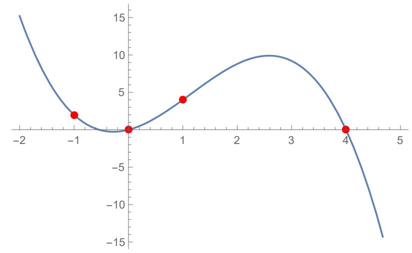
($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.8)



(a)



(b)



(c)

Szabaduló szoba

2.7. Mátrixok, Determináns & Mátrixok sajátértékei

2.7.1. Feladat.

(a) $A+B=\begin{pmatrix}2&3&-3\\4&-1&4\end{pmatrix}$, (b) $3A=\begin{pmatrix}3&0&-6\\6&-3&9\end{pmatrix}$, (c) $B^T=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\-1&1\end{pmatrix}$,

(d) $BC=\begin{pmatrix}4&0\\2&0\end{pmatrix}$, (e) $CA=\begin{pmatrix}5&-2&4\\-3&2&-8\\-8&4&-12\end{pmatrix}$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.1)

2.7.2. Feladat.

(a) $2A=\begin{pmatrix}2&4\\6&0\end{pmatrix}$, (b) $A+B$ nem létezik, (c) $B+C^T=\begin{pmatrix}2&-2&2\\6&5&3\end{pmatrix}$,

(d) BA nem létezik, (e) $BC=\begin{pmatrix}2&3\\2&15\end{pmatrix}$, (f) $CB=\begin{pmatrix}10&2&5\\11&5&2\\6&2&2\end{pmatrix}$,

(g) $AB+2C^T=\begin{pmatrix}9&-1&4\\9&5&10\end{pmatrix}$.

⇝ **videó:** $\boxed{\textbf{7.2. Feladat}}$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.2)

2.7.3. Feladat.

(a) -11, (b) 14, (c) 14,
(d) -70 (e) 10, (f) -21,
(g) -16, (h) -7.

⇝ **videók:** $\boxed{\textbf{7.3. Feladat: (a), (c) és (e)}}$, $\boxed{\textbf{7.3. Feladat: (g)}}$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.3)

2.7.4. Feladat. $V=14$.

⇝ **videó:** $\boxed{\textbf{7.4. Feladat}}$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.4)

2.7.5. Feladat. $x=2$.

⇝ **videó:** $\boxed{\textbf{7.5. Feladat}}$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.5)

2.7.6. Feladat.

$$AA^T=\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}, \qquad |AA^T|=11,$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&9\end{pmatrix}, \qquad |A^TA|=0.$$

⇝ videó: 7.6. Feladat

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.6)

2.7.7. Feladat.

(a) nincs sajátérték,

(b) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$,

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$,

(d) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$,

(e) $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $\lambda_3 = 3$,

(f) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 4$,

(g) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

⇝ videó: 7.7. Feladat: (d)

⇝ kidolgozott feladat (pdf): 7.7. Feladat: (a)–(b) és (d)

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.7)

2.7.8. Feladat.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

⇝ videó: 7.8. Feladat: (a)–(b)

⇝ kidolgozott feladat (pdf): 7.8. Feladat: (a)–(b)

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.8)

2.7.9. Feladat.

(a) Nem, (b) nem, (c) nem, (d) igen.

⇝ videók: 7.9. Feladat: (a), 7.9. Feladat: (d)

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.9)

2.8. Lineáris egyenletrendszerek & Vektorterek

2.8.1. Feladat.

(a) $\{(2,-3,-1)\}$,
(b) nincs megoldás,
(c) $\{(2,1,-2)\}$,
(d) $\left\{\left(2x_3+1, \frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}, x_3\right) : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$,
(e) nincs megoldás,
(f) $\{(17-3x_2+3x_4, x_2, 4+x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
(g) $\{(6-2x_2-2x_4, x_2, 2+x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
(h) $\{(4-u-v-w, 3-v-w, -2+u+2v+w, u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}\}$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **8.1. Feladat: (a)**, **8.1. Feladat: (b)**, **8.1. Feladat: (f)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.8.1)

2.8.2. Feladat.

(a) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(b) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.
(c) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(d) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(e) Lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.
(f) Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.
(g) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **8.2. Feladat: (a)**, **8.2. Feladat: (f)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.8.2)

2.8.3. Feladat.

(a) Ha $x=-4$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(b) Ha $x=7$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(c) Ha $x=-2$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(d) Bármely x esetén lineárisan függő.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **8.3. Feladat: (b)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.8.3)

2.8.4. Feladat.

(a) $(0,-1,0)$, (b) $(-\frac{1}{2},0,0)$, (c) $(3,-4,2)$,
(d) $(3,2,1)$, (e) $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **8.4. Feladat: (c)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.8.4)

2.8.5. Feladat.

(a) 1-dimenziós, egy bázis: $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$;
(b) 1-dimenziós, egy bázis: $(1, -2, 1, 3)$;
(c) 2-dimenziós, egy bázis: $(0, -\frac{1}{2}, 1, 0), (-1, \frac{1}{2}, 0, 1)$;
(d) 3-dimenziós, egy bázis: $(1, 2, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (5, 3, 0, 0, 1)$.

⇝ **videók:** **8.5. Feladat: (b)**, **8.5. Feladat: (c)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.8.5)

2.8.6. Feladat. Az U_λ sajátaltér egy bázisa:

(a) $(2, 1)$, (b) $(-1, 1)$, (c) $(-\frac{1}{3}, 1, 0)$,
(d) $(-1, 0, 1)$, (e) $(-1, 1, 1)$, (f) $(2, 1, 0), (1, 0, 1)$.

⇝ **videók:** **8.6. Feladat: (b)**, **8.6. Feladat: (f)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.8.6)