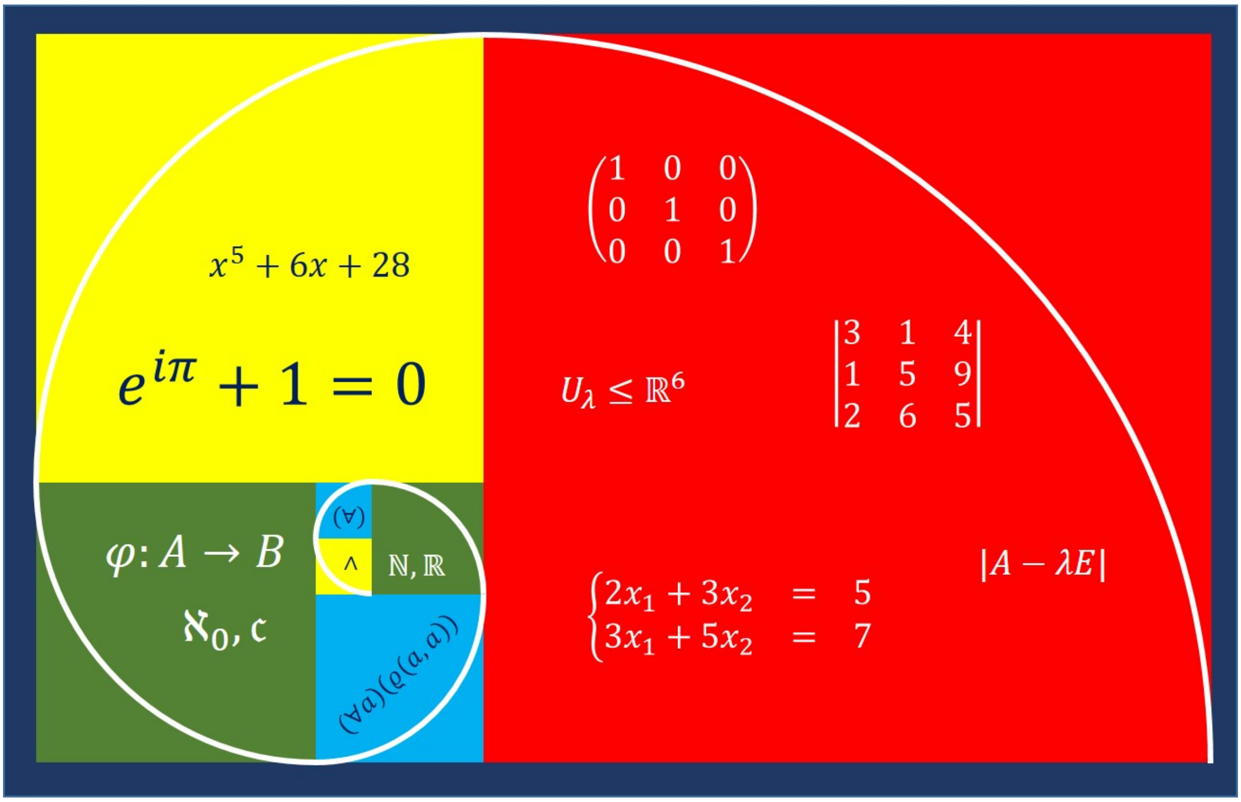
Diszkrét Matematika I.

(Informatikusoknak)

Az előadásvázlatot összeállította:

Dormán Miklós & **Kátai-Urbán Kamilla**



2022

Az előadásvázlat a Diszkrét matematika I (informatikusoknak) tárgyhoz készült. A megfelelő témakörökhöz a 2020-ban tartott online előadások videóit illesztettük be. Az előadáson szereplő fogalmak gyakorlására szolgálnak az itt található feladatsorok.

Számhalmazok jelölései.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ a természetes számok halmaza,
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza,
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ az egész számok halmaza,
$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$ a racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

A jelölések eredete: „natural” (természetes), „Zahl” (szám), „quotient” (kvóciens, azaz hányados), „real” (valós).

Tartalomjegyzék

1. Ítéletkalkulus

1.1. Alapfogalmak

Videó: **Alapfogalmak**

1.1. Definíció. **Ítéletnek** nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke** igaz (vagy hamis). Az ítélet tehát olyan állítás, aminek igazságértéke van.

1.2. Példa. Az alábbi mondatok közül A és B ítélet, de C és D nem az.
A: A Föld a Nap körül kering.
B: Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)
C: Miért tanulnuk logikát?
D: Most nem mondok igazat.
(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

1.3. Példa. A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:
F: **Ha** süt a nap, **akkor** kimegyek az uszodába.
G: Kimegyek az uszodába, **és** süt a nap.
H: **Nem** süt a nap.
I: **Csak akkor** megyek ki az uszodába, **ha** süt a nap.
J: Kimegyek az uszodába, **vagy** süt a nap.
K: **Akkor és csak akkor** süt a nap, **ha** kimegyek az uszodába.

1.4. Definíció. Tetszőleges A, B ítéletre definiáljuk az alábbi **összetett ítéleteket**:
1. A **negációja** a „nem A" ítélet, melynek jele $\neg A$;
2. A, B **konjunkciója** az „A és B" ítélet, melynek jele $A \wedge B$;
3. A, B **diszjunkciója** az „A vagy B" ítélet, melynek jele $A \vee B$;
4. A, B **implikációja** a „ha A, akkor B" ítélet, melynek jele $A \to B$;
5. A, B **ekvivalenciája** az „akkor és csak akkor A, ha B" ítélet, melynek jele $A \leftrightarrow B$.

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor **prímítéletnek** nevezzük.

1.5. Megjegyzés. Az ítéletkalkulusban a prímítélet a tovább nem bontható építőkő, az atom. Az igaz és hamis logikai értéket a továbbiakban **i**, illetve **h** jelöli. Sok más helyen, pl. sok programozási nyelvben 1, illetve 0 jelöli az igaz, illetve a hamis logikai értékeket.

1.6. Definíció. A 1.4. Definicióban bevezetett öt **logikai művelet** művelettáblázatai a következők:

A	$\neg A$
h	**i**
i	**h**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**h**	**h**	**i**	**i**
h	**i**	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**h**	**h**	**i**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

1.7. Példa. A köznapi **és** nem mindig fejez ki konjunkciót, valamint a konjunkciót nem csak az **és** fejezheti ki.
L: Péter és Pál szomszédok (*Nem konjunkció:* külön-külön nem mondhatjuk, hogy szomszéd.)
M: Péter és Pál haragtartó (*Konjunkció:* csak rövidítése a „Péter haragtartó **és** Pál haragtartó." mondatnak.)
N: Péter elmegy a sarokig és balra fordul. (*Nem konjunkció:* időrendiséget fejez ki.)
O: Szeretem a csokoládét, de utálom a kelkáposztát. (*Konjunkció:* a **de** helyettesíthető **és**-sel.)

1.8. Példa. A mindennapi életben a **vagy** kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.
P: Kávét hoz, vagy álmos. (**megengedő vagy**: akár mind a kettő megtörténthet.)
Q: Gyalog megy, vagy biciklizik. (**kizáró vagy**: csak az egyik történhet meg.)

A matematikai logikában és a matematikában is a **vagy** kötőszót mindig megengedő vagy értelemben használjuk. Az „A kizáró vagy B" ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

1.9. Példa. A „csak akkor A, ha B”, „B szükséges feltétele A-nak”, „A elegendő feltétele B-nek” és „ha A, akkor B” ítéletek mind ugyanazt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:
R: Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.
S: A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.
T: Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütének.
U: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

1.10. Definíció. **Ítéletváltozónak** nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az itéletkalkulus **formulái** a következők:

1. az $A_1, \dots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike formula;
2. ha F, G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula; és
3. minden ítéletkalkulusbeli formula az (1) és (2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

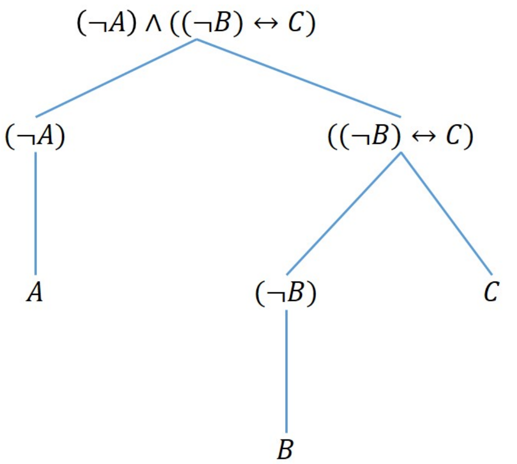
1.11. Megjegyzés. A fenti definíció egy rekurzív definícó (vö.: Fibonacci-sorozat).

1.12. Definíció. Legyenek F és G formulák. Azt mondjuk, hogy a G **részformulája** F-nek, ha G fellép az F formula 1.10. Definícióban leírt előállítása során.

1.13. Példa. Az $F = (\neg A) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C)$ formula részformulái:

$$A,\ B,\ C,\ (\neg A),\ (\neg B),\ (\neg B) \leftrightarrow C,\ (\neg A) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C).$$

Összesen hét darab részformulája van a formulának (vö.: 1. ábra).



1. ábra. Az F formula részformulái

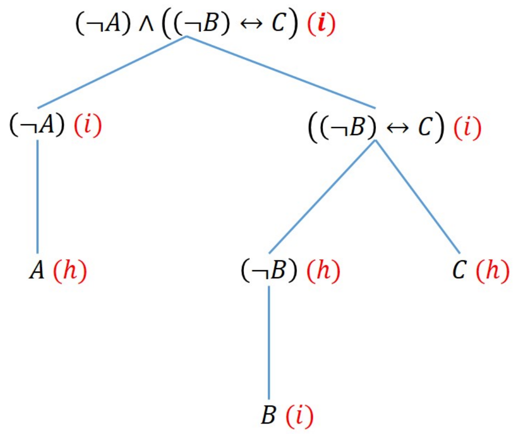
1.14. Megjegyzés. Adott formula ítéletváltozói mindig részformulái a formulának, továbbá a teljes formula is mindig részformulája önmagának.

1.15. Példa. Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a prímítéleteket jelöli. Például a következő ítéletek
V: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.
W: Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.
X: Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.
egy lehetséges formalizálása a következő: $V = A \to B$, $W = (\neg B) \to (\neg A)$, $X = \neg\big(A \wedge (\neg B)\big)$, ahol az A és B ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába” és „Süt a nap” prímítéleteket jelöli.

1.2. Logikai ekvivalencia, tautológia, TDNF

Videó: Logikai ekvivalencia, tautológia, TDNF

1.16. Definíció. Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a **formula igazságértéke** a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére kiszámoljuk a formula igazságértékét, akkor megkapjuka formula **igazságtáblázatát**.



2. ábra. A 1.13. Példabeli F formula igazságértéke, ha A és C hamis, B pedig igaz

1.17. Példa. A 1.15. példa X formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	**h**	**i**	**h**	**i**
h	**i**	**h**	**h**	**i**
i	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**i**	**h**	**h**	**i**

1.18. Definíció. Az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblazatai megegyeznek). Jelölés: $F \equiv G$.

1.19. Definíció. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv \mathbf{i}$.

1.20. Tétel. Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

$\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

$A \wedge A \equiv A,$	$A \vee A \equiv A,$	(idempotencia)
$A \wedge B \equiv B \wedge A,$	$A \vee B \equiv B \vee A,$	(kommutativitás)
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C),$	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C),$	(asszociativitás)
$A \wedge (A \vee B) \equiv A,$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A,$	(abszorptivitás)
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C),$	(disztibutivitás)

$\neg$ alaptulajdonsága:

	$\neg(\neg A) \equiv A,$	(dupla tagadás)
$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B),$	$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$	(De Morgan szabályok)

i és **h** alaptulajdonságai:

$A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h},$	$A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i},$
$A \wedge \mathbf{i} \equiv A,$	$A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i},$
$A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h},$	$A \vee \mathbf{h} \equiv A,$
$\mathbf{i} \rightarrow A \equiv A,$	$\mathbf{h} \rightarrow A \equiv \mathbf{i},$
$A \rightarrow \mathbf{i} \equiv \mathbf{i},$	$A \rightarrow \mathbf{h} \equiv \neg A,$

$\to$ és $\leftrightarrow$ alaptulajdonságai:

$$A \to B \equiv (\neg A) \lor B, \qquad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A),$$
$$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A), \qquad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$$
$$A \to (B \to C) \equiv (A \land B) \to C, \qquad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$$
$$A \to (B \land C) \equiv (A \to B) \land (A \to C), \qquad (A \lor B) \to C \equiv (A \to C) \land (B \to C).$$

1.21. Tétel. Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosan akkor teljesül, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

1.22. Tétel. Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

1.23. Tétel. Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve a változók minden előfordulásánál, újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

1.24. Definíció. Az F formulát **diszjunktív normálformának** nevezünk, ha $F = K_1 \lor \cdots \lor K_t$ alakú, ahol $K_1, \ldots, K_t$ mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója, oly módon, hogy K_i-ben $(1 \leqslant i \leqslant m)$ minden változó legfeljebb egyszer szerepel.

Ha az $A_1, \ldots, A_n$ változókból felépített $K_1 \lor \cdots \lor K_t$ diszjunktív normálforma esetén a $K_1, \ldots, K_t$ formulák páronként különböző n-tagú konjunkciók, amelyekben az $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul, akkor **teljes diszjunktív normálformáról (TDNF)** beszélünk.

1.25. Megjegyzés. Megengedjük a 0-tagú, üres diszjunkciót **h** jelentéssel, és az üres, 0-tényezőjű konjukciót is **i** jelentéssel. Tehát a konstans **i** és **h** is diszjunktív normálformának tekinthető, a **h** teljes diszjunktív normálforma, az **i** nem teljes diszjunktív normálforma.

1.26. Példa. Tekintsük az A, B, C változókból felépített alábbi formulákat:

1. $A \land (\neg B)$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
2. $A \land (\neg B) \land C$ (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)),
3. $A \lor B \lor C$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
4. $(A \land (\neg B)) \lor (B \land C)$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
5. $(A \land (\neg B) \land C) \lor (A \land B \land C)$ (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)).

1.27. Tétel. Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

2. Predikátumkalkulus

Videó: **Predikátumkalkulus**

Az ítéletkalkulus nem elegendő bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, ezért az ítéletkalkulust ki kell bővíteni. Bevezetjük az úgynevezett kvantorokat:
- **univerzális kvantor**: „bármely, minden, összes, tetszőleges”, jele: $\forall$
- **egzisztenciális kvantor**: „van olyan, létezik, található”, jele: $\exists$

2.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{F}$ halmazok, $\tau\colon \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}_0$. A $\mathcal{P}$ halmaz elemei a **predikátumjelek**, az $\mathcal{F}$ halmaz elemei a **függvényjelek**, valamint τ az **aritásfüggvény/változószámfüggvény**. Ha $P \in \mathcal{P}$ és $\tau(P) = m$, akkor P m-változós predikátumjel, ha $f \in \mathcal{F}$ és $\tau(f) = n$, akkor f n-változós függvényjel.

2.2. Példa. Legyen $\mathcal{P} = \{P, Q\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, valamint

$$\tau\colon \{P, Q, f, g\} \to \mathbb{N}_0,\ \ \tau(P) = 1, \tau(Q) = 2, \tau(f) = 0, \tau(g) = 2.$$

2.3. Definíció. **Predikátumnak** nevezzük az olyan kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk.

2.4. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:
1. $O(x, y)$: „x osztója y-nak”,
2. $P(x)$: „x páros szám”,
3. $E(x, y)$: „x egyenlő y-nal”,
4. $M(x, y, z)$: „az x és y számok szorzata z”.

A „*Minden páros szám osztható 3-mal.*” ítéletet predikátumkalkulusban $(\forall x)(P(x) \to O(3, x))$ formalizálja. A kvantorokat zárójelbe kell tenni, és a hatókörét is zárójel jelöli. A kvantor mindig az őt követő legrövidebb részformulára vonatkozik. (Vö.: $(\forall x)P(x) \to O(3, x)$.)

2.5. Definíció. A predikátum változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. Az individuumtartomány egy elemét **individuumkonstansnak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

2.6. Példa. A 2.4. Példában megadott $(\forall x)(P(x) \to O(3, x))$ formulában az x individuumváltozó. Az individuumtartomány (azaz x lehetséges értékeinek halmaza), az egész számok halmaza. A 3 individuumkonstans (az individuumtartomány eleme).

2.7. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $\forall$ kvantor után általában implikációt, a $\exists$ kvantor után pedig „és”-t használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug” $(\forall x)(P(x) \to H(x))$ és a „létezik olyan politikus, aki hazug” $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ítéletek formalizálásai mutatják.

2.8. Definíció. **Függvénynek** nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve szintén az individuumtartomány elemét kapjuk. Az individuumkonstansok 0-változós függvényeknek tekinthetők. A függvényeket kis betűkkel jelöljük.

2.9. Példa. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza, és vezessük be az $f(x, y)$: „x és y szorzata” függvényjelet, valamint használjuk a 2.4. Példában bevezetett predikátumokat. Döntsük el, hogy igaz-e az alábbi állítás:

$$(\forall x)(\forall y)(E(f(x, 3), y) \to O(x, y)).$$

Az állítás igaz, mivel minden x, y egész számra teljesül az oszthatóság definíciója miatt a következő: ha $x \cdot 3 = y$, akkor x osztója y-nak.

2.10. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. Ekkor a predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **kifejezései** a következők:
(k_1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés,
(k_2) ha $t_1, \ldots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezés, és
(k_3) minden kifejezés (k_1) és (k_2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

2.11. Példa. A 2.9. Példában szereplő formula részkifejezései az x, y individuumváltozók, és a 3, illetve $f(x, 3)$ függvények, melyek 0- illetve 2-változósak.

2.12. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ (nemüres) halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. A predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **formulái** a következők:

(p_1) ha $t_1, \ldots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \ldots, t_n)$ **prímformula** vagy **atomi formula**,

(p_2) ha F és G formulák, valamint x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike **összetett formula**, és

(p_3) minden formula (p_1) és (p_2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

2.13. Példa. A 2.9. Példában szereplő formulában prímformulák az $E(f(x,3),y)$ és az $O(x,y)$, összetett formulák például az $(E(f(x,3),y) \to O(x,y))$, és a $(\forall y)(E(f(x,3),y) \to O(x,y))$.

2.14. Definíció. A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F-et a **kvantor hatáskörének** hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F-beli előfordulásait **kötöttnek** nevezzük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy formula **szabad változói** alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

2.15. Példa. a $(\exists x)(\forall y)\big((\forall z)R(g(x),z) \wedge R(g(z),y)\big)$ formulában az x és az y változók kötötten fordulnak elő, a z változónak pedig van kötött és szabad előfordulása is, tehát a formula nem zárt. A z változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mintha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\exists x)(\forall y)\big((\forall t)R(g(x),t) \wedge R(g(z),y)\big).$$

2.16. Megjegyzés. Ha megadjuk az induviduumtartományt, valamint a predikátumjeleknek és függvényjeleknek megadjuk egy jelentését, azt **interpretációnak** nevezzük.

2.17. Példa. Tekintsük az $F = ((\exists z)E(f(x,z),y)) \wedge ((\exists z)E(f(y,z),x))$ formulát. Ennek a formulának x és y a szabad változója, tehát minden individuumtartományon (amelyen f és E értelmezve van) meghatároz egy kétváltozós $F(x,y)$ predikátumot. Az egész számok halmazán, ha f a szorzást, E pedig az egyenlőséget jelöli, akkor ez a predikátum ekvivalens az $x = \pm y$ predikátummal. Fontos, hogy a formula interpretációja függ az individuumtartománytól és a függvényjelek és predikátumjelek rajta való interpretációjától. Ha például a f függvényjel alatt az összeadást értenénk az egész számok halmazán, akkor $F(x,y)$ az azonosan igaz predikátum lenne.

2.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk, hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját, az F és G formulák logikai értéke a szabad változók tetszőleges behelyettesítése mellett megegyezik. Az F formulát **tautológiának** hívjuk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

2.19. Tétel. Legyenek F, G tetszőleges formulák, H pedig olyan formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák:

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F, \\ \neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F), \\ (\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G, \\ (\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H. \end{aligned}$$

2.20. Példa. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza, és vezessük be az $n(x)$: „x négyzete” függvényjelet, valamint használjuk a korábban már bevezetett $O(x,y)$: „x osztója y-nak” predikátumjelet. A „*Minden szám osztója a négyzetének.*” ítélet formalizálása: $(\forall x)O(x,n(x))$. Ennek a formulának a tagadása: $\neg(\forall x)O(x,n(x)) \equiv (\exists x)\neg O(x,n(x))$, azaz „*Van olyan szám, amely nem osztója a négyzetének.*”

2.21. Tétel. Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikalilag ekvivalens formlulákat kapunk.

2.22. Tétel. Ha egy formula részformuláját egy vele logikalilag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

2.23. Példa. A 2.4. Példában láttuk, hogy a „*Minden páros szám osztható 3-mal.*” ítéletet a $(\forall x)(P(x) \to O(3,x))$ formula formalizálja. Az előző tételek felhasználásával megadjuk a formula **tagadását** úgy, hogy negáció legfeljebb csak prímformulára vonatkozzon:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(P(x) \to O(2,x)) &\equiv (\exists x)\neg(P(x) \to O(2,x)) \\ &\equiv (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee O(2,x)) \\ &\equiv (\exists x)(\neg(\neg P(x)) \wedge \neg O(2,x)) \\ &\equiv (\exists x)(P(x) \wedge \neg O(2,x)). \end{aligned}$$

A második lépésben az $A \to B \equiv \neg A \vee B$ azonoságot használtuk, az utolsó előtti lépésben pedig a $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ De Morgan azonosságot alkalmaztuk. Tehát az eredeti mondat tagadása: „*Van olyan páros szám, amely nem osztható* 3*-mat.*"

2.24. Megjegyzés. Az ítéletkalkulussal ellentétben predikátumkalklusban nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

3. Halmazok

3.1. Teljes indukció, rekurzív definíció

Videó: **Teljes indukció, rekurzív definíció**

Az *indukció* alapvető része a gondolkodásunknak, de a „sok esetből az összesre következtető” módszer nem mindig állja meg a helyét. A *teljes indukció* viszont az alaphalmaz és az elvégzett lépések miatt egy bizonyítási módszert ad a „minden n-re $H(n)$” típusú állítások esetén.

3.1. Tétel. Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme. (Teljesül $\mathbb{N}$-re és $\mathbb{N}_0$-ra is.)

3.2. Tétel (Teljes indukció tétele, 1. alak)**.** Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha
1. $H(1)$ igaz, és
2. bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

3.3. Megjegyzés. $\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz, vagy akár a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a 3.2. Tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna írni a tétel (1) részénél.

3.4. Tétel (Teljes indukció tétele, 2. alak)**.** Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1), H(2), \ldots, H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

Formálisan: Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \to H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$.

3.5. Megjegyzés. Az 3.4. Tétel esetén sem marad ki $H(1)$, azaz az $n = 1$ eset, hiszen akkor az állítások üres halmaza lesz a $\{H(1), \ldots, H(n-1)\}$ halmaz, amelyre a konjunkció automatikusan igaz (ld. Logika előadásvázlat), így $H(1)$-nek is igaznak kell lenni.

3.6. Példa. Teljes indukció segítségével bebizonyítjuk, hogy tetszőleges n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. A teljes indukció tételének 1. alakját használjuk.

1. lépés Belátjuk a legkisebb elemre, $n = 1$ esetén $6 \mid 1^3 + 5 = 6$ teljesül.

2. lépés Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. Ez az úgynevezett **indukciós feltevés**.

3. lépés Bizonyítjuk az indukciós feltevés segítségével, hogy az állítás $(n+1)$-re is igaz.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= \underbrace{(n^3+5n)}_{6 \mid \text{ az ind. felt. miatt}} + \underbrace{3n(n+1)}_{6 \mid \text{ mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{6 \mid}\end{aligned}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható.

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció „párja” a **rekurzív definíció**.

3.7. Rekurzív definíció, 1. alak. Minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk definiálni az $F(n)$ fogalmat. Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk meg $F(n+1)$-et $F(n)$ felhasználásával.

3.8. Rekurzív definíció, 2. alak. Minden $n \in \mathbb{N}$-re definiálni szeretnénk $F(n)$ fogalmát, ehhez megadjuk az első néhány elemre a fogalmat, és $F(n)$-et a korábbi elemek segítségével definiáljuk.

3.9. Példa. Rekurzívan definíció szerepelt ítéletkalkulusban a formulák megadásánál (1.10. Definíció), valamint predikátumkalkulusban a kifejezések (2.10. Definíció), illetve a formulák (2.12. Definíció) esetén.

3.10. Példa. Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk az $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot, az ún. **Fibonacci-sorozatot.**

3.2. Halmazműveletek

Videó: **Halmazműveletek**

3.11. Megjegyzés. A **halmaz** és a halmaz **eleme** alapfogalmak, nem definiáljuk. Körülírva a fogalmat, halmazon elemek egyértelműen meghatározott összességét értjük, ahol az egyértelműség az objektivitásra utal, és nem arra, hogy ténylegesen el tudjuk-e dönteni, hogy x eleme-e a halmaznak.

3.12. Jelölés. Az $a \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy a eleme A-nak. A $\neg(a \in A)$ formula helyett $a \notin A$-t írunk.

3.13. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy egy elem nem lehet többször eleme egy halmaznak, azaz csak az számít, hogy az adott elem eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében csak azt tesszük fel, hogy $\in$ kétváltozós predikátumjel, és az individuumtartományunk a halmazok összessége.

3.14. Jelölés. A halmazt többnyire a $\{,\}$ zárójelek között az elemek „felsorolásával” adjuk meg, de megadhatjuk ún. általános elem és definiáló tulajdonságok segítségével is.

3.15. Példa.
- $\{2,3,5,7\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ egyjegyű prímszám$\}$.
- $\{2,3,4,5,\ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$.
- $\{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})(x = 3y)\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 3$ osztója x-nek$\}$.
- $\big\{(x,y) \mid x,y$ valós számok és $x^2 + y^2 < 1\big\}$,
  az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

3.16. Definíció. Ha az A és B halmazoknak ugyan azok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy $A = B$. Ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B-nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz **valódi részhalmaza** B-nek, amelyet $A \subset B$-vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

3.17. Definíció. Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük, azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül (jel.: $\emptyset$).

3.18. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra
(a) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$;
(b) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (ún. tranzitivitás);
(c) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ (ún. antiszimmetria).

3.19. Megjegyzés. Bármely A halmaz esetén az A és $\emptyset$ halmazokat az A halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük. A 3.18. Tétel (c) része (antiszimmetria) gyakran hasznos annak igazolására, hogy két halmaz egyenlő.

3.20. Példa. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{1,2\}; \quad B = \{1,\ (3-1)\}; \quad C = \{1,1,2\}; \quad D = \{\emptyset,1,2\}; \quad E = \{\{1\},2\}; \quad F = \{\{1,2\}\}.$$

Ekkor $A = B = C$, a többi mind különböző. A D halmaznak három, F-nek egy eleme van, a többinek kettő. A $\{1\}$ halmaz részhalmaza A, B, C és D-nek, de E és F-nek nem. Csak E-nek eleme $\{1\}$, a többinek nem. Az $\emptyset$ részhalmaza minden halmaznak (ld. 3.18. Tétel (a)). Az $\emptyset$ eleme a D halmaznak (abban felsoroltuk elemként), a többinek nem.

3.21. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket (uniójukat)** és **metszetüket**:

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\}, \qquad A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\}.$$

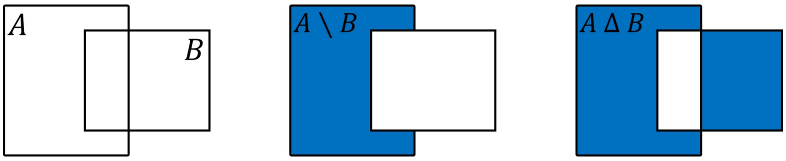
Azt mondjuk, hogy A és B **diszjunktak**, ha $A \cap B = \emptyset$.

3.22. Definíció. Legyen rögzítve egy U halmaz az **univerzum (alaphalmaz)**. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A **komplementerét**:

$$\overline{A} = \{\, x \in U : x \notin A \,\}.$$

3.23. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{\, x : x \in A \wedge x \notin B \,\}, \qquad A \triangle B = \{\, x : x \in A \leftrightarrow x \notin B \,\}.$$



3. ábra. Az A és B halmazok különbsége és szimmetrikus különbsége

3.24. Tétel. Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra

$$\begin{array}{rlr}
A \cap A = A, & A \cup A = A, & \text{(idempotencia)} \\
A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \text{(kommutativitás)} \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & \text{(asszociativitás)} \\
(A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), & \text{(disztibutivitás)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlr}
 & \overline{\overline{A}} = A, & \text{(dupla tagadás)} \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \text{(De Morgan szabályok)} \\
A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, & \\
A \cap U = A, & A \cup U = U, & \\
A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A &
\end{array}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

3.25. Definíció. Legyen $\mathcal{I}$ tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in \mathcal{I}$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \mid (\forall i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \mid (\exists i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Videó: **Descartes-szorzat, hatványhalmaz, osztályozás**

3.3. Descartes-szorzat, hatványhalmaz

3.26. Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a és b az első, illetve a második komponense. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő komponenseik egyenlők.

3.27. Megjegyzés. A komponensek sorrendje fontos, tehát az $a = b$ eset kivételével $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben a halmazok esetén a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

3.28. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{\, (a, b) : a \in A \wedge b \in B \,\}.$$

Azonos tényezők szorzatát hatványként is jelölhetjük: pl. $A \times A = A^2$.

3.29. Példa. Az $A = \{1,2\}$ kételemű és $B = \{5,6,7\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata a hatelemű $A \times B = \{(1,5),(1,6),(1,7),(2,5),(2,6),(2,7)\}$ halmaz. Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, mert ha (a,b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

3.30. Definíció. Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A **hatványhalmazának** nevezzük és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\, X : X \subseteq A \,\}.$$

3.31. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

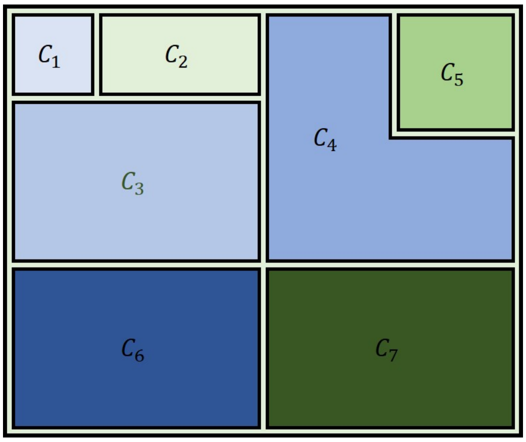
8-elemű. Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz. Gondoljuk át, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

3.4. Osztályozások

3.32. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{P}(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás az A halmazon** vagy más szóval **osztályozása az A halmaznak**, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$,
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik az A halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.



4. ábra. Osztályozás a $C_1, \ldots, C_7$ osztályokkal

3.33. Példa. Tekintsük az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmazt, ekkor $\mathcal{C}_1 = \{\{1,3,6\},\{2,4\},\{5\}\}$ osztályozás az A halmazon. Viszont $\mathcal{C}_2 = \{\{1,3\},\{2,5\},\{6\}\}$ nem osztályozás A-n, hiszen nem fedi le az A halmazt. A $\mathcal{C}_3 = \{X \subseteq A \mid |X| = 4\}$ halmaz sem osztályozása A-nak ugyanis a részhalmazok nem diszjunktak.

4. Relációk

Videó: **Alapfogalmak, műveletek**

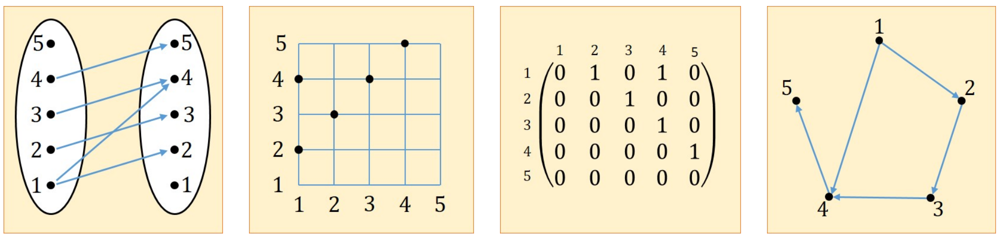
4.1. Definíció. Legyenek A és B halmazok. Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. A $\tau \subseteq A \times B$ megfeleltetés indulási halmaza A, érkezési halmaza B. Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

4.2. Megjegyzés. A relációk lényegében ugyanazok, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

4.3. Megjegyzés. A $\rho \subseteq A \times A$ relációt szemléltethetjük

- **nyíldiagrammal**: az $(a, b) \in \rho$ párt az a pontból a b pontba irányított nyíllal ábrázoljuk, ekkor A két példány között vezetnek a nyilak;
- **gráffal**: hasonlóan a nyíldiagrammhoz, de az A halmazon belül húzzuk a nyilakat,
- **koordinátarendszerben**: az $A \times A$ Descartes-szorzatot ábrázoljuk koordinátarendszerben, és megjelöljük a ρ részhalmazba tartozó elemeket;
- **mátrixszal**: ha $|A| = n$, akkor A elemeit megszámozzuk, és aszerint írunk 1-et, illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i-edik sorának j-edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban. (Informatikában gyakran használják ezt a módszert, a relációkat a bitmátrixukkal adják meg.)

A $\rho = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4), (4,5)\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ reláció szemléltetése nyíldiagrammal, koordinátarendszerben, mátrixszal és gráffal.



5. ábra. Az ρ reláció szemléltetése

4.1. Műveletek relációkkal

4.4. Megjegyzés. Mivel bármely $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk egyben halmazok is, ezért relációkon is elvégezhetők a halmazműveletek.

4.5. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és

$$\alpha = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,4), (5,6)\} \subseteq A^2,$$
$$\beta = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,4), (5,5)\} \subseteq A^2.$$

- $\alpha \cap \beta = \{(1,3), (3,4)\}$,
- $\alpha \cup \beta = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,4), (5,5), (5,6)\}$,
- $\alpha \setminus \beta = \{(1,1), (2,3), (5,6)\}$,
- $\alpha \triangle \beta = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (5,5), (5,6)\}$.

4.6. Definíció. Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ relációra definiáljuk annak **inverzét**:

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in \rho\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

4.7. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $\beta = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,4), (5,5)\}$ reláció az A halmazon, ekkor $\beta^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (4,3), (5,5)\}$.

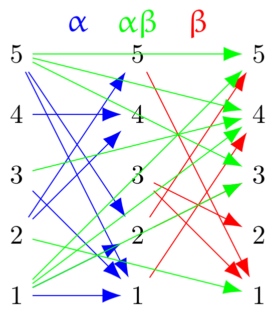
4.8. Definíció. A $\rho, \sigma \subseteq A \times A$ relációk **szorzata**:

$$\rho\sigma = \{(x, y) \in A \times A \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \rho \ \wedge \ (z, y) \in \sigma)\}.$$

4.9. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 2)\} \subseteq A^2,$$
$$\beta = \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (5, 1)\} \subseteq A^2.$$

Ekkor $\alpha\beta = \{(1, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 4), (5, 4), (5, 3), (5, 5)\}$. Vizuálisan az a kérdés, hogy mely bal oldali



6. ábra. Az α (kék nyilak) és β (piros nyilak) relációk $\alpha\beta$ (zöld nyilak) szorzata

elemből tudok eljutni egy középső elemen keresztül valamelyik jobb oldaliba.

4.10. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tekintsük az $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A \times A$ és $\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A \times A$ relációkat. Ekkor

$$\alpha\beta = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}, \qquad \beta\alpha = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (5, 6)\}.$$

4.11. Tétel. Tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \subseteq A \times A$ relációk esetén teljesülnek a következők:
1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, (a relációk szorzása asszociatív)
2. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

4.12. Megjegyzés. A relációk szorzása nem kommutatív, azaz a tényezők sorrendje általában nem cserélhető fel, ahogy ezt a 4.10. Példa is mutatja.

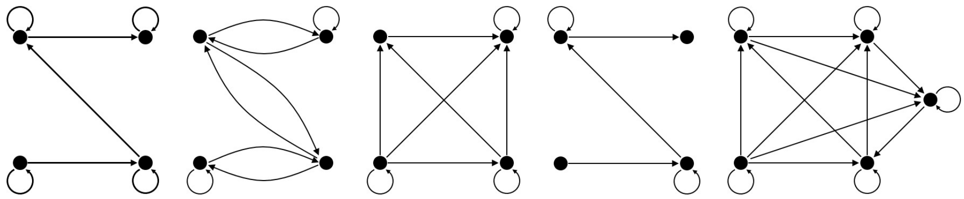
4.2. Relációtulajdonságok

Videó: Relációtulajdonságok

4.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció
- **reflexív**, ha bármely $x \in A$ elemre $(x, x) \in \alpha$ teljesük,
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$,
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$,
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$,
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.

4.14. Megjegyzés. A fenti relációtulajdonságok a reláció gráfjával a következőképpen jellemezhetők:
- reflexív reláció: a gráf minden csúcsában van hurokél,
- szimmetrikus reláció: ha két pont között az egyik irányban van él, akkor a másik irányban is van,
- antiszimmetrikus reláció: különböző csúcsok között legfeljebb az egyik irányban megy él,
- tranzitív reláció: bármely két csúcsra, ha az egyikből két csatlakozó irányított él mentén el tudunk jutni a másikba, akkor egyetlen irányított él mentén is eljuthatunk,
- dichotom reláció: bármely két csúcs között van irányított él.

4.15. Példa.



7. ábra. Reflexív, szimmetrikus, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációk

1. Az $\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a+b=2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció nem reflexív, pl. $3+3 \neq 2$, így $(3,3) \notin \alpha$. Szimmetrikus, hiszen ha $a+b=2$, akkor $b+a=2$, mivel az összeadás az egész számok halmazán kommutatív. Nem antiszimmetrikus, pl. $a=-1$, $b=3$ ellenpélda. Az α reláció nem tranzitív, ugyanis pl. $a=c=0$, $b=2$ esetén sem teljesül, hogy ha $a+b=2$ és $b+c=2$, akkor $a+c=2$. Az α reláció nem is dichotom, mivel pl. $(3,4) \notin \alpha$ és $(4,3) \notin \alpha$.
2. A $\beta = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció (ún. oszthatósági reláció $\mathbb{N}$-en) reflexív, mivel minden szám osztható önmagával. Nem szimmetrikus, hiszen pl. 2 osztója 6-nak, de 6 nem osztója 2-nek. A β reláció antiszimmetrikus, ugyanis ha két pozitív egész szám egymásnak kölcsönösen osztója, akkor egyenlőek. A reláció tranzitív is, ha a osztója b-nek és b osztója c-nek, akkor a osztója c-nek, ugyanis, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Viszont β nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztója a másiknak.
3. A $\gamma = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \leqslant b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom.
4. A $\delta = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom.

4.16. Megjegyzés. Ha egy reláció dichotom, akkor relexív is, másképpen fogalmazva, ha egy reláció nem reflexív, akkor nem is dichotom. A példák alapján azt érezhetjük, hogy a szimmetria és az antiszimmetria egyszerre nem teljesülhet, de ez nem így van, pl. a $\{(1,1),(2,2)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus.

4.17. Tétel. Tetszőleges $\alpha, \beta \subseteq A^2$ relációkra érvényesek a következő állítások:
- α pontosan akkor szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.
- α akkor és csakis akkor tranzitív, ha $\alpha\alpha \subseteq \alpha$.
- ha az $\alpha, \beta \subseteq A^2$ relációk reflexívek, akkor az $\alpha\beta$ szorzat is reflexív.

4.18. Megjegyzés. Szimmetrikus relációk szorzata nem mindig szimmetrikus. Legyen $A = \{1,2,3\}$, valamint $\alpha = \{(1,2),(2,1)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(2,3),(3,2)\} \subseteq A^2$. Mindkét reláció szimmetrikus, és $(1,3) \in \alpha\beta$, de $(3,1) \notin \alpha\beta$.

4.3. Ekvivalenciarelációk

Videó: Ekvivalenciarelációk

4.19. Definíció. Legyen ρ reláció az A halmazon. Azt mondjuk, hogy ρ **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

4.20. Példa. A 4.15. Példában látott δ reláció ekvivalenciareláció.

4.21. Megjegyzés. A következőkben látni fogjuk, hogy adott halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk és osztályozások (ld. 3.32. Definíció) között szoros kapcsolat van.

4.22. Tétel. Legyen $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, ekkor a

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a,b) \in A \times A \mid (\exists X \in \mathcal{C})(a, b \in X)\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

4.23. Példa.
1. Legyen A egy iskola tanulóinak halmaza, és $\mathcal{C}$ elemei legyenek az iskola osztályai. Ekkor a $\mathcal{C}$ osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a,b) \in A \times A \mid a \text{ és } b \text{ osztálytársak, vagy } a = b\}.$$

2. A $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \dots\} \subseteq P(\mathbb{Z})$ osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(0,0)\} \cup \{(z,z) \colon z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(z,-z) \colon z \in \mathbb{Z}\} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon |a| = |b|\}.$$

4.24. Definíció. Legyen ρ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az **$a \in A$ elemet tartalmazó osztályon (vagy blokkon)** az $a/\rho = \{b \in A \mid (b,a) \in \rho\}$ halmazt értjük. A ρ ekvivalenciareláció blokkjainak $A/\rho = \{a/\rho \mid a \in A\}$ halmazát az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** vagy ρ szerinti **osztályozásának** nevezzük.

4.25. Példa. Tekintsük az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $1/\rho = \{b \in A \mid (b,1) \in \rho\} = \{1,2\}$. Hasonlóan $2/\rho = \{1,2\}$ és $3/\rho = \{3\}$. Tehát definíció szerint

$$A/\rho = \{1/\rho, 2/\rho, 3/\rho\} = \{\{1,2\},\{1,2\},\{3\}\} = \{\{1,2\},\{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

4.26. Tétel. Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ρ osztályozása A-nak.

4.27. Megjegyzés. Láttuk, hogy az ekvivalenciarelációk osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciarelációkat határoznak meg.

Valójában a rögzített A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk és osztályozások lényegében ugyanazok, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés adható meg közöttük. Ugyanis ha $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, és $\rho_{\mathcal{C}}$ az 4.22. Tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció, valamint $\mathcal{C}' = A/\rho_{\mathcal{C}}$ az 4.26. Tétel szerint származtatott osztályozás, akkor $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, azaz visszakaptuk az eredeti osztályozást.

Hasonlóan, ha a ρ ekvivalenciarelációból indulunk ki, az 4.26. Tételt alkalmazva kapjuk a $\mathcal{C} = A/\rho$ osztályozást, majd az 4.22. Tétel szerint a $\rho' = \rho_{\mathcal{C}}$ ekvivalenciarelációt, amely ρ-val egyezik meg.

Videó: **Részbenrendezett halmaz, lezárt**

4.4. Részbenrendezett halmazok

A (részben)rendezések a hierarchia fogalmát ragadják meg matematikailag. Ez a fogalom az informatikában is fellép, hiszen pl. a szoftverek is hierarchikus rendbe szervezett kisebb egységekből (szubrutin, modul, eljárás, stb.) épülnek fel.

4.28. Definíció. Az A halmazon értelmezett ρ reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ha ρ részbenrendezés az A halmazon, akkor az $(A;\rho)$ párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük.

4.29. Definíció. Az A halmazon értelmezett reláció **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

4.30. Példa. A 4.15. Példabeli β és γ relációk részbenrendezések, tehát $(\mathbb{Z};\beta)$ és $(\mathbb{Z};\gamma)$ részbenrendezett halmazok. A β reláció nem rendezés, mivel nem dichotom, de γ rendezés is.

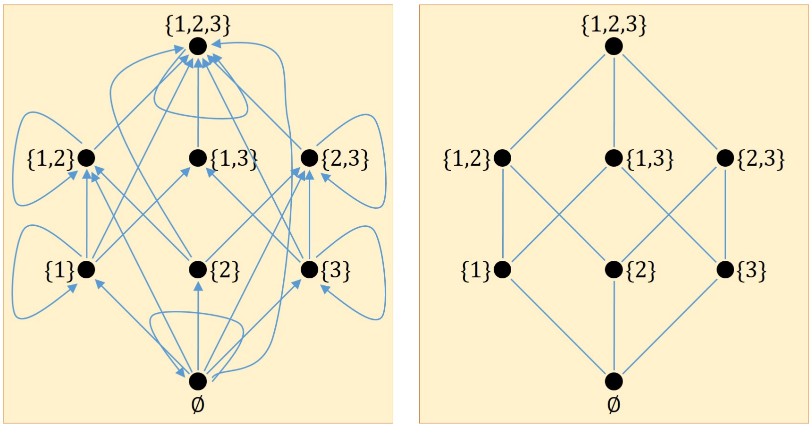
4.31. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a és b elemek **összehasonlíthatók** a $\leqslant$ részbenrendezésben, ha $a \leqslant b$ vagy $b \leqslant a$. Tehát egy részbenrendezés pontosan akkor dichotóm, ha bármely két eleme összehasonlítható.

4.32. Példa. A 12 egész szám pozitív osztóinak halmazán az oszthatósági reláció részbenrendezés szerint, a 2 és 3 egészek nem összehasonlítható elemek, míg 2 és 6 összehasonlíthatóak, ugyanis $2 \mid 6$ teljesül.

4.33. Definíció. Legyen ρ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértéshez, akkor $(a,b) \in \rho$ helyett $a \leqslant b$-t írunk, és az $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leqslant b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem **fedi** az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljük, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c < b$ teljesül.

4.34. Megjegyzés. A részbenrendezéseket véges halmazon úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt „rajzoljuk be”, mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t „lejjebb” rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leqslant e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_0, c_1, \dots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d = c_0 \prec c_1 \prec \dots \prec c_n = e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés **Hasse-diagramjának** nevezzük.

4.35. Tétel. Legyen $\leqslant$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza a részbenrendezést.

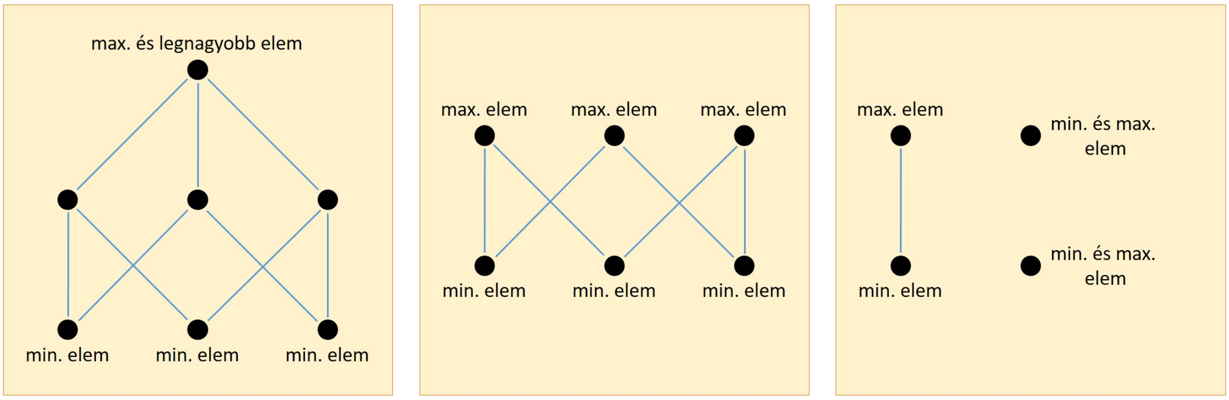


8. ábra. A $(P(\{1,2,3\};\subseteq))$ részbenrendezett halmaz gráfja és Hasse-diagramja

4.36. Definíció. Legyen $\leqslant$ részbenrendezés az A halmazon. Az $m \in A$ elem
(a) **maximális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $m < a$.
(b) **minimális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $a < m$.
(c) **legnagyobb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $a \leqslant m$.
(d) **legkisebb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $m \leqslant a$.

4.37. Megjegyzés. Az előző definíció (a), (b) részét szavakkal is leírjuk. Az $(A;\leqslant)$ részbenrendezett halmaz egy eleme maximális, ha nincs nála nagyobb elem a részbenrendezés szerint. Egy eleme pedig legnagyobb, ha minden más elemnél nagyobb.

Részbenrendezett halmaznak lehet több maximális és több minimális eleme is, és az is előfordulhat, hogy sem maximális, sem minimális elem sincsen.



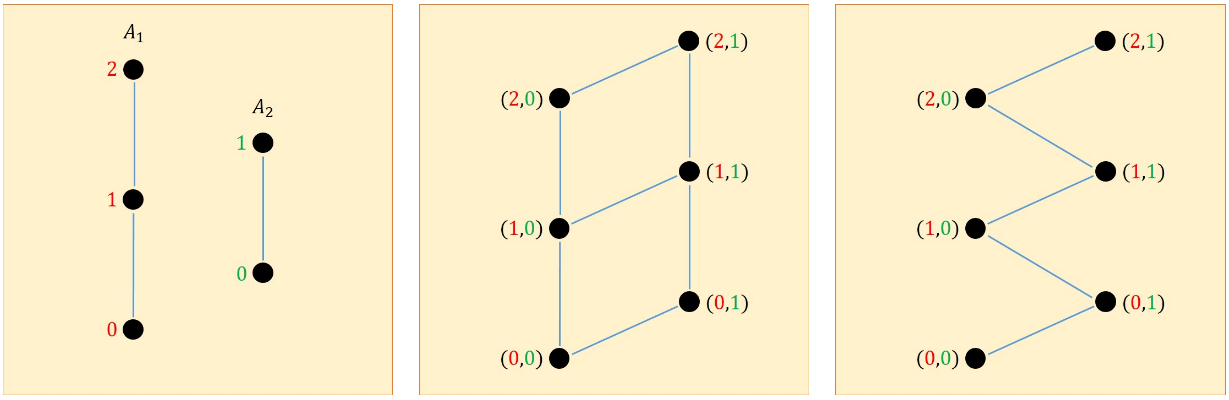
9. ábra. Minimális és maximális elemek részbenrendezett halmazokban

4.38. Példa.
- Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$, és tekintsük az $(A;\ |\ )$ részbenrendezett halmazt. Ennek a részbenrendezett halmaznak nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.
- Az $(\mathbb{N}_0;|)$ részbenrendezett halmaz esetén az 1 minimális és legkisebb elem is, a 0 pedig maximális és legnagyobb elem is.

4.39. Tétel. Teljesülnek a következő állítások.
- Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.
- Egy részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legnagyobb és legfeljebb egy legkisebb elem lehet.
- Részbenrendezett halmaz legkisebb eleme minimális, legnagyobb eleme maximális.

4.40. Definíció. Legyenek adottak az $(A_1;\leqslant_1)$ és az $(A_2;\leqslant_2)$ részbenrendezett halmazok. **Direkt szorzatukat** úgy kapjuk, hogy az $A_\times A_2$ Descartes-szorzatukon definiáljuk a komponensenkénti részbenrendezést. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2;\leqslant)$, ahol $(a_1,a_2) \leqslant (b_1,b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leqslant_1 b_1$ és $a_2 \leqslant_2 b_2$. Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.

4.41. Definíció. Az $(A_1; \leqslant_1)$ és az $(A_2; \leqslant_2)$ **rendezett** halmazok (tehát nemcsak részbenrendezett) **lexikografikus szorzatán** az $(A_1 \times A_2; \sqsubseteq)$ rendezett halmazt értjük, ahol a $\sqsubset$ reláció a **lexikografikus rendezést** jelenti, azaz $(a_1, a_2) \sqsubseteq (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy $(a_1 = b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2)$. Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.



10. ábra. Részbenrendezett halamzok direkt és lexikografikus szorzata

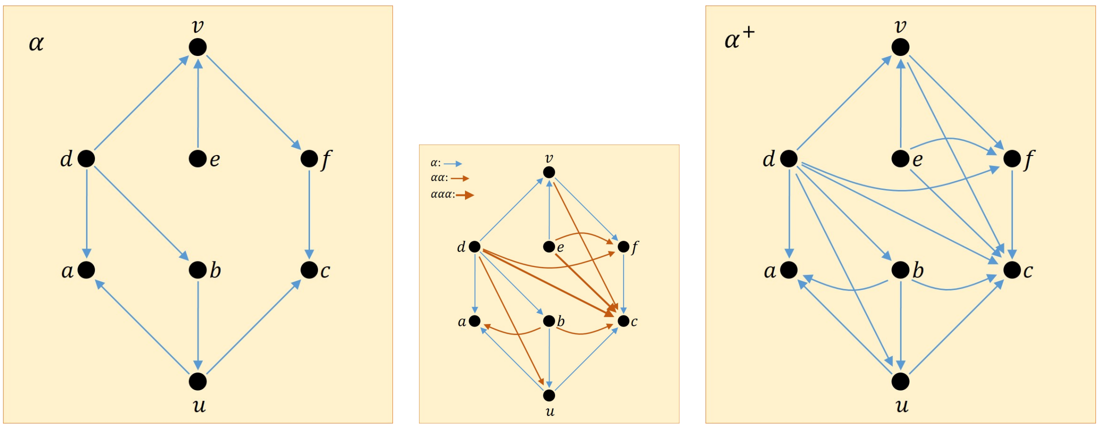
4.5. Relációk lezártjai

4.42. Tétel. Legyenek ρ és σ relációk az A halmazon, valamint $\mathcal{T}$ a reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás tulajdonságok valamelyike. Ha a ρ és σ relációk $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $\rho \cap \sigma$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

4.43. Következmény. Ekvivalenciarelációk metszete ekvivalenciareláció, és részbenrendezések metszete részbenrendezés.

4.44. Definíció. Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ρ reláció **tranzitív lezártja** alatt azt a legszűkebb ρ^+ tranzitív relációt értjük, amelyre $\rho \subseteq \rho^+$. Azaz a ρ relációt a lehető legkevesebb elemmel bővítjük úgy, hogy tranzitív relációt kapjunk.

4.45. Tétel. Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor
(a) $\rho^+ = \rho \cup \rho\rho \cup \rho\rho\rho \cup \dots = \bigcup\{\rho^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(b) $\rho^+ = \{(a, b) \in A \times A \mid (\exists n \in \mathbb{N}_0)(\exists c_1, \dots, c_n \in A)((a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, b) \in \rho)\}$.



11. ábra. Az $\alpha \subseteq A^2$ reláció és tranzitív lezártja

4.46. Példa. (a) Ha $A = \{1, 2, 3\}$ és $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$, akkor $\rho\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$, és $\rho\rho\rho$ már nem tartalmaz új elemeket. Tehát $\rho \cup \rho\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ már tranzitív, ez lesz ρ^+, a tranzitív lezárt.

(b) Ha $A = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$ és $\alpha = \{(u, a), (u, c), (b, u), (d, a), (d, b), (f, c), (d, v), (e, v), (v, f)\}$, akkor $\alpha\alpha = \{(b, a), (b, c), (d, f), (d, u), (e, f), (v, c)\}$, $\alpha\alpha\alpha = \{(d, a), (d, c), (e, c)\}$ és $\alpha^4 = \alpha^5 = \cdots = \emptyset$. Így $\alpha^+ = \alpha \cup \alpha\alpha \cup \alpha\alpha\alpha$ (ld. 11. ábra).

4.47. Definíció. Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ρ reláció **reflexív és tranzitív lezártja** alatt azt a legszűkebb ρ^* reflexív és tranzitív relációt értjük, amelyre $\rho \subseteq \rho^*$.

4.48. Tétel. Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, ekkor a $\rho^* = \rho^+ \cup \{(a, a) : a \in A\}$ a ρ reflexív és tranzitív lezártja.

4.49. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. A 4.46.(a) Példában láttuk, hogy $\rho^+ = \rho \cup \rho\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. Így ρ reflexív és tranzitív lezártja:

$$\rho^* = \rho^+ \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

5. Leképezések, számosságok

5.1. Leképezések

Videó: Leképezések

5.1. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az A halmaz a megfeleltetés **indulási halmaza**, B pedig az **érkezési halmaza**.

5.2. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazból a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $P(A \times B)$ halmaz elemei, azaz $2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$ darab van belőlük. Például, az $\emptyset$ és $A \times B$ is megfeleltetés A-ból B-be

5.3. Definíció. A $\rho \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be menő **parciális leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra **legfeljebb egy** $b \in B$ létezik, amelyre $(a, b) \in \rho$.

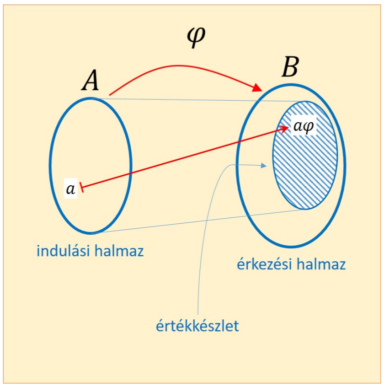
5.4. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\rho = \{(1, 4), (3, 4)\} \subseteq A \times B$ megfeleltetés parciális leképezés. Mivel minden A-beli elem esetén 5 lehetőség közül választhatunk (nem rendelünk hozzá semmit, vagy B valamelyik elemét rendeljük hozzá), így A-ból B-be menő parciális leképezésből $5^3 = 125$ darab van. Az $\emptyset$ is parciális leképezés A-ból B-be.

5.5. Definíció. A $\varphi \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be menő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra **pontosan egy** $b \in B$ létezik, amelyre $(a, b) \in \varphi$.

Leképezések esetén a $\varphi \subseteq A \times B$ helyett a $\varphi\colon A \to B$ jelölés használjuk. Továbbá, $(a, b) \in \varphi$ helyett azt mondjuk, hogy az a elem φ melletti képe b, és azt írjuk, hogy $a\varphi = b$ vagy $a \mapsto b$. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy a b elem őse az a.

5.6. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\varphi = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \subseteq A \times B$ megfeleltetés leképezés (és parciális leképezés is), általában helyette a $\varphi\colon A \to B$, $1\varphi = 4$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 4$ jelölést használjuk. Mivel minden A-beli elem esetén 4 lehetőség közül választhatunk, így A-ból B-be menő leképezésből $4^3 = 64$ darab van. Az $\emptyset \subseteq A \times B$ megfeleltetés NEM leképezés A-ból B-be.

5.7. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ leképezés esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak** nevezzük. Az $\{a\varphi \mid a \in A\} \subseteq B$ halmaz neve **értékkészlet**.



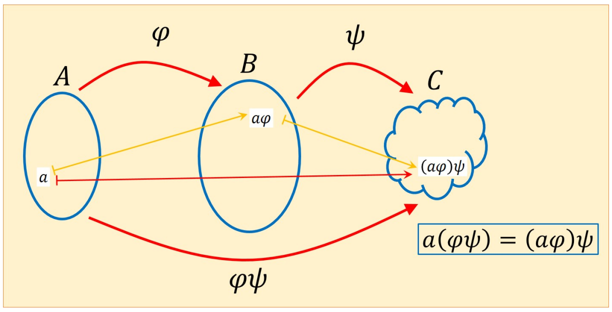
12. ábra. Leképezés és részei

5.8. Tétel. Ha $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon B \to C$ leképezések, akkor a

$$\varphi\psi = \{(a, c) \mid (\exists b \in B)((a, b) \in \varphi \wedge (b, c) \in \psi)\}$$

megfeleltetés leképezés, a φ és ψ leképezések szorzata. Leképezésként írva:

$$\varphi\psi\colon A \to C,\ a \mapsto (a\varphi)\psi.$$



13. ábra. Leképezések szorzása

5.9. Megjegyzés. Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Például abban az esetben, amikor φ is és ψ is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli, a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

5.10. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon C \to D$ **leképezések egyenlők**, ha $A = C$ (indulási halmazaik megegyeznek), $B = D$ (érkezési halmazai megegyeznek) és $a\varphi = a\psi$ bármely $a \in A$ elemre.

5.11. Tétel. A leképezések szorzása asszociatív, azaz tetszőleges $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ és $\tau\colon C \to D$ leképezésekre

$$(\varphi\psi)\tau = \varphi(\psi\tau)$$

teljesül. Mindkét oldalon $A \to D$ leképezés áll.

5.12. Példa. Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazt, és a $\varphi\colon A \to A,\ 1\varphi = 2,\ 2\varphi = 3,\ 3\varphi = 1$, valamint a $\sigma\colon A \to A,\ 1\sigma = 2,\ 2\sigma = 1,\ 3\sigma = 3$ leképezéseket. Ekkor
- $\varphi\sigma\colon A \to A,\ 1\varphi\sigma = 1,\ 2\varphi\sigma = 3,\ 3\varphi\sigma = 2,$
- $\sigma\varphi\colon A \to A,\ 1\sigma\varphi = 3,\ 2\sigma\varphi = 2,\ 3\sigma\varphi = 1,$

azaz $1\varphi\sigma \neq 1\sigma\varphi$. Így $\varphi\sigma \neq \sigma\varphi$.

A leképezések szorzása nem kommutatív.

5.13. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ leképezés **injektív**, ha A különböző elemeinek képe különböző, azaz

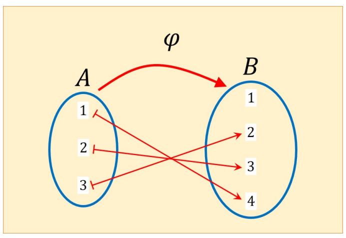
$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \ \to\ a_1\varphi \neq a_2\varphi).$$

5.14. Megjegyzés. Az injektivitás más szóval azt jelenti, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varphi = a_2\varphi \ \to\ a_1 = a_2).$$

Nyíldiagramon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki, és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik.

5.15. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\varphi\colon A \to B,\ 1\varphi = 4,\ 2\varphi = 3,\ 3\varphi = 2$ leképezés injektív (ld. 14. ábra).



14. ábra. Az injektív φ leképezés

Az A-ból B-be menő injektív leképezésből $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ darab van, mivel különböző elemekhez különböző képet kell rendelni.

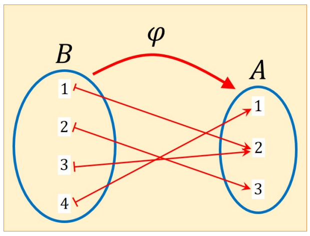
5.16. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ leképezés **szürjektív**, ha B minden eleme előfordul képelemként, azaz

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varphi = b).$$

Más szóval, ha φ értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

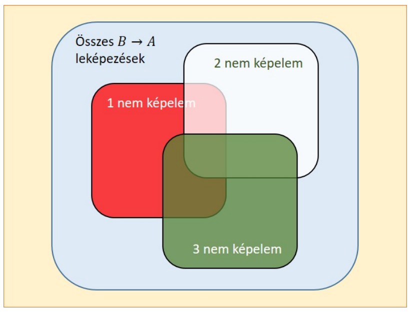
5.17. Megjegyzés. Nyíldiagramon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ezért leképezés), és B minden elemébe megy nyíl.

5.18. Példa. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, akkor A-ból B-be nem adható meg szürjektív leképezés, de B-ből A-ba igen. Például a $\varphi\colon B \to A,\ 1\varphi = 2,\ 2\varphi = 3,\ 3\varphi = 2,\ 4\varphi = 1$ leképezés szürjektív (ld. 15. ábra).



15. ábra. A szürjektív φ leképezés

5.19. Megjegyzés. Hány B-ből A-ba menő szürjektív leképezés van? Vonjuk ki a B-ből A-ba menő összes leképezés számából (3^4) azoknak a leképezéseknek a számát, amikor legalább az egyik elem nem áll elő képként (2^4) mindhárom kimaradó elem esetén. Így viszont azt az esetet, amikor 1-elemű az értékkészlet a szükségesnél többször levontuk, ezért hozzá kell ismét adni. Tehát a B-ből A-ba menő szürjektív leképezésből: $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36$ darab van (ld. 16. ábra).



16. ábra. Szita-formula

5.20. Definíció. A φ leképezés **bijektív**, ha szürjektív és injektív is.

5.21. Megjegyzés. Nyíldiagramon a bijektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ezért leképezés), és B minden elemébe pontosan egy nyíl érkezik.

5.22. Példa. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, akkor A-ból B-be nem adható meg bijektív leképezés, és B-ből A-ba sem.

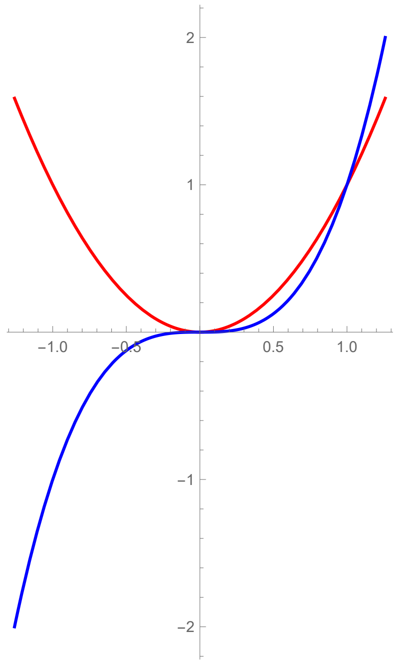
5.23. Példa. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor a $\varphi\colon A \to A,\ 1\varphi = 2,\ 2\varphi = 3,\ 3\varphi = 1$ leképezés bijektív. Az A-ból A-ba menő minden injektív leképezés már szürjektív is lesz, tehát az A-ból A-ba menő bijektív leképezések száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

5.24. Példa. (a) A $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ leképezés (ld. 17. ábrán a piros grafikon)

- **nem injektív**, mert pl. a -2 és az 2 helyen azonos értékeket vesz fel,
- **nem szürjektív**, mert negatív valós számokat nem vesz fel értékként,
- **nem bijektív**.

(b) A $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ leképezés (ld. 17. ábrán a kék grafikon)

- **injektív**, mivel a függvény szigorúan monoton, minden értéket csak egyszer vesz fel,
- **szürjektív**, mivel minden valós értéket felvesz így, tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elem őse $x = \sqrt[3]{y}$, mert $\left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y$,
- **bijektív**.



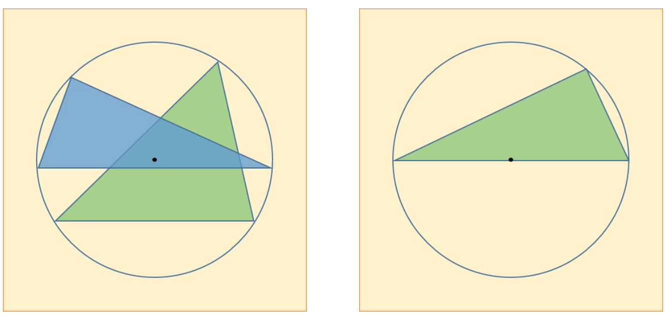
17. ábra. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés (piros) és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ leképezés (kék) grafikonja

Az előző két példában olyan leképezések szerepeltek, amelyek ábrázolhatók voltak koordinátarendszerben függvényként. A függvények számhalmazok között megadott leképezések, de nem minden leképezés indulási és érkezési halmaza áll számokból.

5.25. Példa. Jelölje $\mathbb{H}$ a sík háromszögeinek halmazát, $\mathbb{S}$ pedig a sík pontjainak halmazát. Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi \colon \mathbb{H} \to \mathbb{S}, \ h \mapsto h \text{ körülírt körének középpontja.}$$

- A φ leképezés **nem injektív**, ugyanis különböző háromszögekhez tartozhat ugyanaz a középpont a síkon. Pl. ha kiválasztunk egy elemet $\mathbb{S}$-ből, és valamekkora (nem 0) sugárral kört rajzolunk a pont körül, akkor a körvonalon kiválaszthatunk többféleképpen is három pontot úgy, hogy háromszöget alkossanak (ld. 18. ábra bal oldala). Tehát vannak $\mathbb{H}$-nak különböző elemei úgy, hogy ugyanaz a φ melletti kép tartozik hozzájuk.
- A φ leképezés **szürjektív**, mert bárhogy választunk egy pontot $\mathbb{S}$-ből a korábban leírt módszerrel, találhatok hozzá háromszöget (elemet $\mathbb{H}$-ból), amelynek a φ melletti képe a kiválaszott pont (ld. 18. ábra jobb oldala).
- Mivel a φ leképezés nem injektív, így **nem bijektív**.



18. ábra. A φ leképezés nem injektív, de szürjektív

5.26. Tétel. Tetszőleges $\rho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezésekre,
(a) ha ρ és σ szürjektív, akkor $\rho\sigma$ is szürjektív,
(b) ha ρ és σ injektív, akkor $\rho\sigma$ is injektív,
(c) ha ρ és σ bijektív, akkor $\rho\sigma$ is bijektív,
(d) ha $\rho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív,

(e) ha $\rho\sigma$ injektív, akkor ρ injektív,
(f) ha $\rho\sigma$ bijektív, akkor ρ injektív és σ szürjektív.

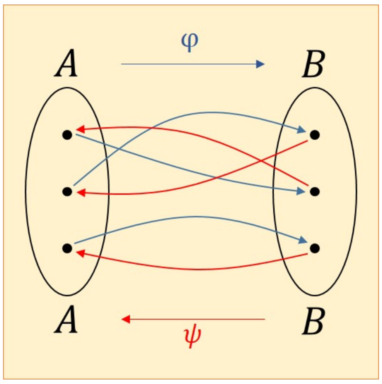
5.27. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \ a \mapsto a.$$

5.28. Tétel. Tetszőleges $\varphi\colon A \to B$ leképezésre $\mathrm{id}_A\varphi = \varphi$ és $\varphi\mathrm{id}_B = \varphi$.

5.29. Definíció. Legyenek $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon B \to A$ leképezések. Azt mondjuk, hogy ψ **inverze** φ-nek, ha $\varphi\psi = \mathrm{id}_A$ és $\psi\varphi = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez szimmetrikus viszony: ψ akkor és csak akkor inverze φ-nek, ha φ inverze ψ-nek.

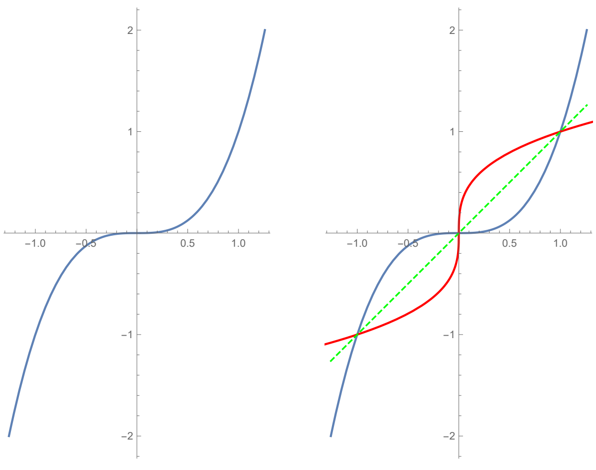
5.30. Tétel. Legyen $\varphi\colon A \to B$ tetszőleges leképezés.
1. Akkor és csakis akkor létezik φ-nek inverze, ha φ bijektív.
2. Ha φ bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $\psi\colon B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $a\varphi = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Tehát tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $b\psi = a$ akkor és csak akkor, ha $a\varphi = b$.)



19. ábra. Leképezés (φ) és inverze ($\psi = \varphi^{-1}$)

5.31. Megjegyzés. Ha a φ leképezés bijektív, akkor van, mégpedig pontosan egy inverze van, ezt az egyértelműen meghatározott inverzet fogjuk φ^{-1}-gyel jelölni.

5.32. Tétel. Tetszőleges $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon B \to C$ bijektív leképezésre
(a) φ^{-1} bijektív, valamint $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi$,
(b) $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$.



20. ábra. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ leképezés és inverzének, az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ leképezésnek a grafikonjai

5.33. Példa. A $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ leképezésről korábban láttuk, hogy bijektív. A leképezés inverze: $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$ (ld. előző ábra).

5.34. Megjegyzés. A Relációk témakörénél definiáltuk a következőket. Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje $\mathrm{Part}(A)$ az A halmaz osztályozásainak (más szóval partícióinak) halmazát, $\mathrm{Eq}(A)$ pedig az ekvivalenciarelációk halmazát az A halmazon. Új fogalmaink segítségével a partíciók és az ekvivalenciák közötti kapcsolat az alábbi formát ölti. A

- $\varphi\colon \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A),\ \rho \mapsto A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}$ és
- $\psi\colon \mathrm{Part}(A) \to \mathrm{Eq}(A),\ \mathcal{C} \mapsto \rho_{\mathcal{C}}$

leképezések bijektívek, amelyek egymás inverzei.

5.2. Halmazok elemszáma, számossága

Videó: Számosságok

5.35. Példa. (Az 5 fogalma, Czédli Gábor professzor előadása alapján.) Legyen az a halmaz, aminek az elemszámát keressük, a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek”). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt”, hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű” halmaz.

Ezt követően az „öt” nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt” fogalmát absztrakcióval definiáltuk – az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)

Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mamutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt”, és elégedett vala; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az, hogy „öt”. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is.

5.36. Definíció. Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés. (Jelölése: $|A| = |B|$.)

5.37. Definíció. A természetes számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük. (Kiejtve „alef null”; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

5.38. Tétel. Az $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ számosság a legkisebb végtelen számosság.

5.39. Megjegyzés. Az összes halmazból álló összesség **nem halmaz**, mert túl sok eleme van. Ezen úgy segítünk, hogy az ilyen túl nagy összességeket elnevezzük osztályoknak. A reláció fogalma nemcsak halmazon, hanem – minden változtatás nélkül – osztályon is értelmes.

5.40. Tétel. Az összes halmazok $\mathcal{H}$-val jelölt osztályán az „egyenlő számosságúnak lenni” reláció, azaz az

$$„\big\{(A, B) \in \mathcal{H}^2 \mid |A| = |B|\big\}”$$

„reláció” „ekvivalenciareláció”.

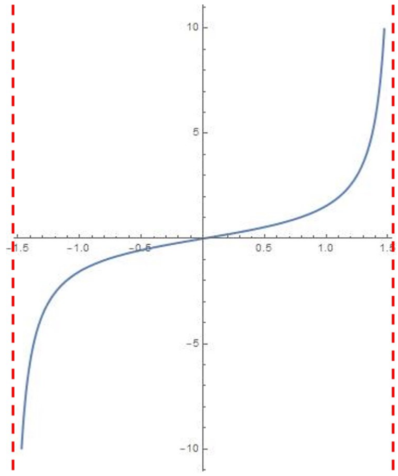
5.41. Megjegyzés. Vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is? Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

5.42. Tétel (Georg Cantor)**.** Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága nem egyenlő a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.

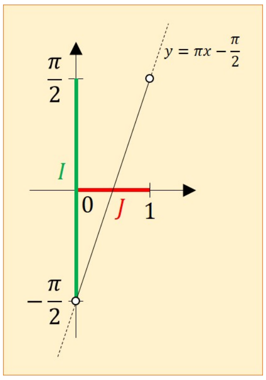
Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak).

5.43. Állítás. A valós számok számossága egyenlő az $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ halmaz számosságával.

5.44. Állítás. Az $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum számossága megegyezik a $J = (0; 1)$ intervallum számosságával (ld. 22. ábra).



21. ábra. Bijektív leképezés I és $\mathbb{R}$ között: az $I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ leképezés grafikonja



22. ábra. Bijekció a $J = (0;1)$ és $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumok között

5.45. Következmény. $|\mathbb{R}| = |(0;1)|$, azaz pontosan annyi valós szám van, mint amennyi valós szám van a $(0;1)$ intervallumban.

5.46. Állítás. Legyenek a és b valós számok úgy, hogy $a < b$. Ekkor a $(0;1) \to (a;b),\ x \mapsto (b-a)x + a$ leképezés bijektív, ezért

$$|(a;b)| = |(0;1)|,$$

ahol $(a;b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$.

5.47. Tétel (Cantor). $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Mivel $|\mathbb{R}| = |(0;1)|$, ezért elegendő azt igazolni, hogy

$$|\mathbb{N}| \neq |J|,$$

ahol $J = (0;1)$. A bizonyítás módszere az ún. Cantor-féle átlós módszer.

5.48. Definíció. Legyenek A és B halmazok. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, (jel.: $|A| \leqslant |B|$), ha létezik injektív $A \to B$ leképezés.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága (jel.: $|A| < |B|$), ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

5.49. Példa. (a) $|\{1,2,3\}| < |\{1,2,3,4\}|$, hiszen az $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\},\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3$ leképezés injektív, bijekció a két halmaz között pedig nincs.

(b) Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, mert már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A),\ a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.

(c) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto n$ leképezés injektív.

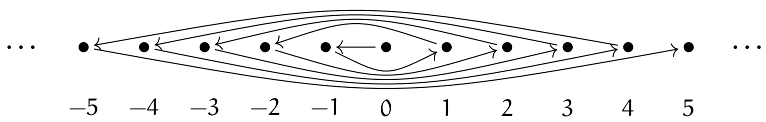
5.50. Definíció. Az A halmaz **véges**, ha létezik olyan n nemnegatív egész, hogy $|A| = n$. Az A halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \aleph_0$. Az A halmaz **megszámlálható**, ha A véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az A halmaz **kontinuum számosságú**, ha $|A| = |\mathbb{R}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

5.51. Tétel. Tetszőleges A halmaz esetén akkor és csak akkor teljesül, hogy $|A| = \aleph_0$, ha A végtelen és sorozatba rendezhető, azaz megadható olyan, az $\mathbb{N}$ elemeivel indexelt $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).

5.52. Példa. Az egész számok halmaza megszámláhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, mivel végtelen és a

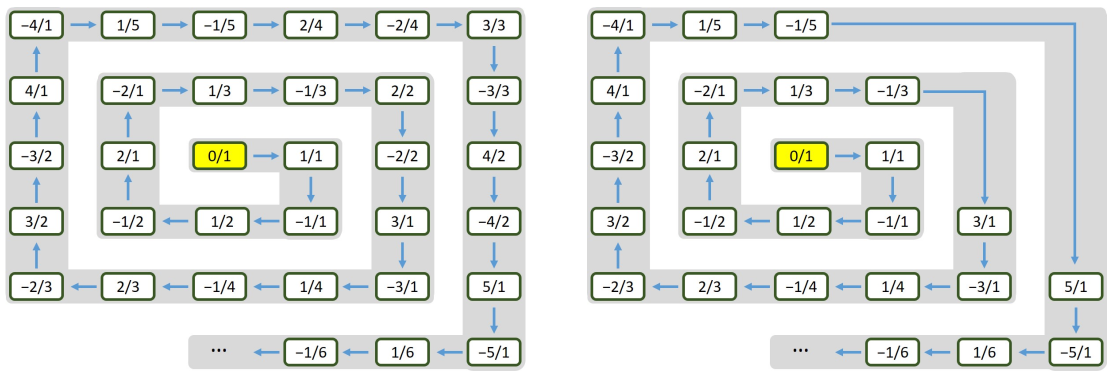
$$0,\ -1, 1,\ -2, 2,\ -3, 3,\ -4, 4, \ldots$$

sorozat minden elemét tartalmazza (ld. 23. ábra).



23. ábra. Az egész számok sorozatba rendezése

5.53. Példa. A racionális számok halmaza megszámláhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mert végtelen, és a nyilak mentén (ld. 24. ábra) sorozatba rendezhető.



24. ábra. A racionális számok felsorolása (ismétlődéssel és ismétlődés nélkül)

5.54. Tétel (A Számosságaritmetika Alaptétele)**.** Legyenek A és B halmazok úgy, hogy legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres). Ekkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.

5.55. Tétel. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

5.56. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

6. Komplex számok, polinomok

Videó: Bevezetés, számolás kanonikus alakban

6.1. Komplex számok bevezetése

A valós számokat a számegyenes pontjaival szemléltetjük. A most bevezetendő komplex számokat, amelyek halmazát $\mathbb{C}$ fogja jelölni, pedig a sík pontjaival fogjuk szemléltetni. (Ez az ún. **komplex számsík** vagy **Gauss-féle számsík** vagy **Argand-sík**.)

6.1. Definíció. A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de a műveleteket ($+$ és $\cdot$) nem a „természetes" módon fogjuk végezni:

$$(a,b) + (c,d) \stackrel{\text{def.}}{=} (a+c, b+d) \qquad \text{és} \qquad (a,b)\cdot(c,d) \stackrel{\text{def.}}{=} (ac-bd, ad+bc),$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

6.2. Megjegyzés. Legyenek a és b valós számok. Ekkor

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0) \qquad \text{és} \qquad (a,0)\cdot(b,0) = (ab, 0).$$

Az $(a,0)$ alakú komplex számok úgy viselkednek, mint a valós számok. Az $(a,0)$ komplex számot és az a valós számot azonosítjuk: $(a,0) \equiv a$ $(a \in \mathbb{R})$. Valamint, a $(0,1)$ komplex számot jelölje i.

Ekkor egyrészt $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, másrészt

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi.$$

6.3. Tétel. (a) A komplex számok összeadása kommutatív és asszociatív.
(b) A komplex számok szorzása kommutatív és asszociatív.
(c) A komplex számok szorzása disztributív a komplex számok összeadására vonatkozóan:

$$(v+w)\cdot z = v\cdot z + w\cdot z \quad (v, w, z \in \mathbb{C}).$$

(d) $z \cdot 0 = 0$, $z + 0 = z$ és $z \cdot 1 = z \quad (z \in \mathbb{C})$.

6.2. Kanonikus alak

6.4. Definíció. A $z = (a,b)$ komplex szám **kanonikus alakja** $a + bi$. Az a valós szám a z **komplex szám valós része** (jel.: $\Re z$), a b valós szám z **képzetes része** (jel.: $\Im z$).

6.5. Tétel. (a) Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek, azaz

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2 \text{ és } b_1 = b_2$$

$(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$.
(b) A z komplex szám pontosan akkor valós, ha $\Im z = 0$.

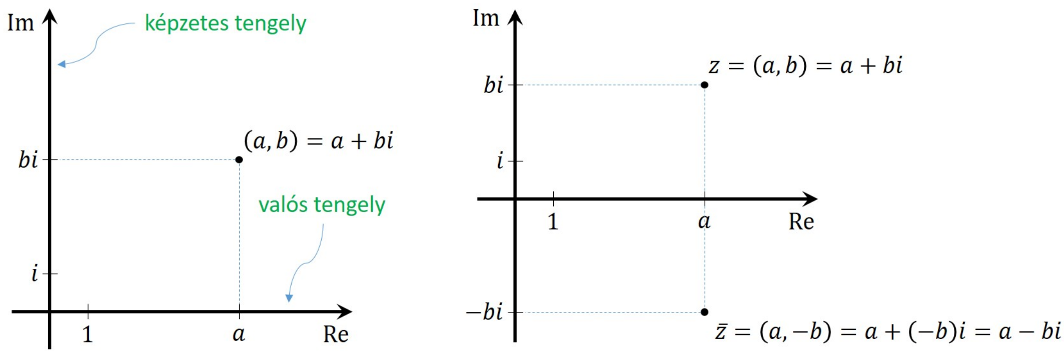
6.6. Definíció. A valós számok a **valós tengelyen** helyezkednek el. A z komplex szám **tisztán képzetes**, ha $\Re z = 0$. A tisztán képzetes komplex számok a **képzetes tengelyen** helyezkednek el. Az i komplex szám a **képzetes egység** vagy **imaginárius egység** (ld. 25. ábra bal oldali része).

6.7. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\bar{z} = \overline{a+bi} = a + (-b)i = a - bi$ komplex számot értjük, tehát a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés (ld. 25. ábra jobb oldali része).

Számoljunk kanonikus alakban: A komplex számkkal való szokásos számolási szabályok (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) mellett még az $i^2 = -1$ szabályt fogjuk alkalmazni.
Összeadás: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$,
Szorzás: $(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$

Reciprok: Legyen $z = a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\cdot i.$$



25. ábra. A Gauss-féle számsík részei és a komplex számok konjugálása

6.8. Példa.

$$\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{2+3i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{2-12i^2-8i+3i}{1^2+4^2} = \frac{14-5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$$

6.9. Megjegyzés. Azokat a számhalmazokat, ahol elvégezhető a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), és érvényesek rá a szokásos tulajdonságok (összeadás, szorzás: asszociatív, kommutatív, szorzás disztributív az összeadásra vonatkozóan) **számtesteknek** nevezzük. Számtest például $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$, valamint $\mathbb{C}$ is számtest. (Az egész számok halmaza nem számtest, mert az osztás kivezet a halmazból.)

6.10. Definíció. A $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám **abszolút értékén** a $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ nemnegatív valós számot értjük. Ez a komplex számsíkon z origótól való távolsága.

6.11. Tétel. Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Ekkor

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \qquad \overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}, \qquad \overline{\overline{u}} = u, \qquad \overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R},$$

$$u + \overline{u} = 2\Re u, \qquad |\overline{u}| = |u|\,, \qquad |u| = \sqrt{u\overline{u}}, \qquad |uv| = |u| \cdot |v|,$$

$$1/z = \overline{z}/|z|^2\,, \qquad |u+v| \leqslant |u| + |v|.$$

6.12. Tétel. Tetszőlegesen $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám esetén a $z^2 = a + bi$ egyenlet mindig megoldható a komplex számok körében.

6.13. Példa. Megadjuk a $z^2 = -9 + 12i$ egyenlet megoldását kanonikus alakban. Legyen $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Mivel $z^2 = x^2 + 2x(yi) + y^2 = (x^2 - y^2) + 12xy \cdot i$, ezért

$$x^2 - y^2 = -9 \;\&\; 2xy = 12.$$

Továbbá, $x, y \neq 0$ következtében $y = \frac{6}{x}$. Visszahelyettesítés után $x^2 - \frac{36}{x^2} = -9$ adódik, majd x^2-tel beszorozva és átrendezve: $(x^2)^2 + 9x^2 - 36 = 0$. Ekkor

$$x^2 = \frac{-9 + \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2} = \frac{-9 + 15}{2} = 3.$$

Így $x = \pm\sqrt{3}$ és $y = \pm\frac{6}{\sqrt{3}} = \pm\frac{6\sqrt{3}}{3} = \pm 2\sqrt{3}$. Az egyenlet megoldásai: $z_1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$ és $z_2 = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$.

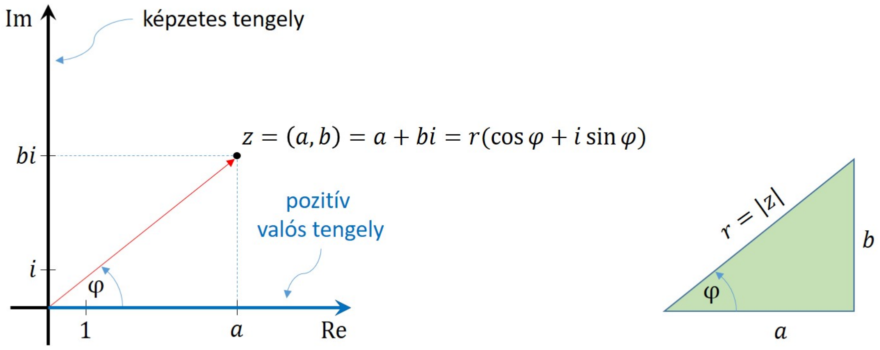
6.14. Példa. Adjuk meg a $\dfrac{(2-i)^2}{(1+i)^3}$ törtet kanonikus alakban.

$$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3} = \frac{4-4i-1}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{3-4i}{1+3i-3-i} = \frac{3-4i}{-2+2i} = \frac{(3-4i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}$$
$$= \frac{-6-6i+8i-8}{2^2+2^2} = \frac{-14+2i}{8} = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4}i.$$

6.3. Trigonometrikus, exponenciális alak

Videó: Trigonometrikus, exponenciális alak

6.15. Definíció. A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével z helyvektora bezár. A(z) 26. ábrán φ. (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.)



26. ábra. Komplex szám kanonikus és triginometrikus alakja

A(z) 26. ábráról leolvasható, hogy $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$.

6.16. Definíció. Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és az abszolút értéke r, akkor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a z komplex szám **trigonometrikus alakja**.

6.17. Megjegyzés. A 0 komplex számnak nincs trigonometrikus alakja. Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, melynek trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ akkor

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot i\right),$$

azaz $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (Ha $a \neq 0$, akkor $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.)

6.18. Példa. (a) Legyen $z = 1 + i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

(b) Legyen $z = 1 + \sqrt{3}i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, és

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Tehát $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

6.19. Definíció. Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és abszolút értéke r, akkor $z = re^{\varphi i}$ a z komplex szám **exponenciális alakja**.

6.20. Példa. Az előző példában meghatároztuk a $1 + i$ és a $1 + \sqrt{3}i$ komplex számok trigonometrikus alakját (tehát ismerjük az abszolút értékeiket és az argumentumaikat), így az exponenciális alak könnyen felírható:

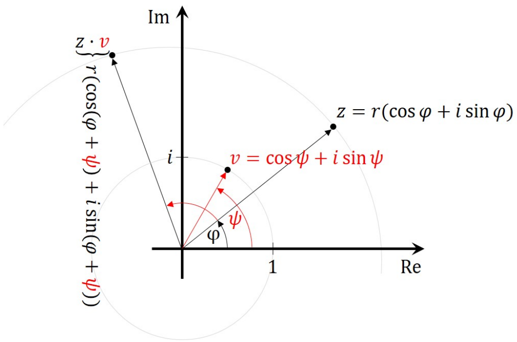
$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad \text{és} \qquad 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

6.21. Megjegyzés. Mivel a trigonometrikus és az exponenciális alakot is a komplex szám argumentuma és abszolút értéke határozza meg, így azok az állítások, amelyeket az egyik alakra megfogalmazunk, a másikra is érvényesek.

6.22. Tétel. Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ nemnulla komplex számok ($r, s > 0$ valós számok, és $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$), akkor

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), & \bar{z} &= re^{-i\varphi},\\
z \cdot w &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big), & z \cdot w &= rse^{i(\varphi+\psi)},\\
\frac{1}{w} &= \frac{1}{s}(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)), & \frac{1}{w} &= \frac{1}{r}e^{-i\psi},\\
\frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)), & \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\psi)}.
\end{aligned}$$

A szorzat trigonometrikus alakjára vonatkozó képletből adódik, hogy rögzített $v = \cos\psi + i\sin\psi$ egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon (ld. 27. ábra).



27. ábra. A trigonometrikus alak és a geometria

6.23. Példa. Kiszámítjuk ugyanazt a törtet trig./exp. és kanonikus alakban is. Felhasználjuk, hogy a számláló és a nevező trig./exp. alakját a 6.20. Példában már meghatároztuk.

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}i\right)$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i}{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

A két alakot összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

6.4. Hatványozás, gyökvonás, egységgyökök

Videó: **Hatványozás, gyökvonás, egységgyökök**

A trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ nemnulla komplex számok esetén a szorzat és z^{-1} a 6.22. Tételben megadott módon számolható:

$$zw = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big),$$

továbbá

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Így adódik a hatványozásra a következő tétel.

6.24. Tétel (Moivre-képlet)**.** Ha n egész szám és $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám, akkor

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi\big).$$

6.25. Példa. Kiszámoljuk a $z = -1+i$ komplex szám 2422-edik hatványát. A z komplex szám trigonometrikus alakjához meg kell határoznunk az abszolút értékét (r) és az argumentumát (φ). Az abszolút értéke: $|z| = r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. A z komplex szám a 2. síknegyedben helyezkedik el a komplex számsíkon, és a valós és képzetes rész abszolút értéke megegyezik, így $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Tehát $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ és

$$(-1+i)^{2422} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{2422} = \sqrt{2}^{2422}\left(\cos\left(2422\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2422\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{1211}\left(\cos\left(1816\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(1816\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{1211}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{1211}i.$$

FONTOS, hogy 1816π azért hagyható el, mert π-nek PÁROS többszöröse.

6.26. Definíció. Tetszőleges n pozitív egész szám és $w \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy a z komplex szám **n-edik gyöke** u-nak, ha $z^n = w$.

6.27. Tétel. Minden 0-tól különböző komplex számnak pontosan n darab különböző n-edik gyöke van. A $w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

6.28. Példa. Meghatározzuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit. Az i a képzetes egység, abszolút értéke $r = 1$, és a képzetes tengely pozitív felén található, így argumentuma $\varphi = \frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus alak $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, tehát az $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ és $n = 3$ szereposztással alkalmazhatjuk a fenti képletet.

$$\begin{aligned}
k=0: &\quad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+0\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0\pi}{3} &&= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} &&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
k=1: &\quad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} &&= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} &&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\\
k=0: &\quad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} &&= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} &&= -i
\end{aligned}$$

Korábban láttuk, hogy a $z^2 = u$ egyenlet tetszőlegesen adott u komplex szám esetén megoldható, azaz $\sqrt{u}$ kanonikus alakban számolva is meghatározható.

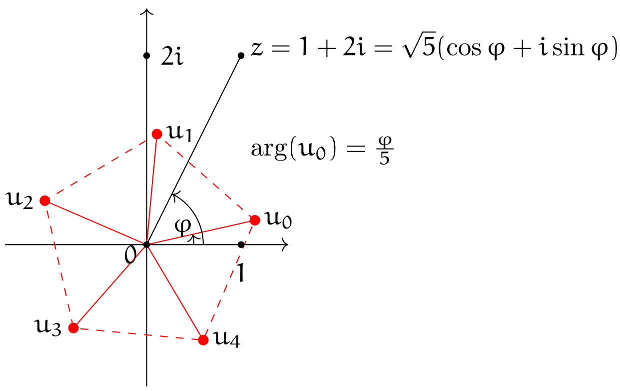
6.29. Példa. (a) A $z^2 = -5$ egyenlet megoldásával megkaptuk, hogy $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$.

(b) A $z^2 = -9 + 12i$ egyenletet megoldottuk (ld. 6.13. Példa) úgy, hogy egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet oldottunk meg a valós számok halmazán, és megkaptuk, hogy $\sqrt{-9+12i} = \pm\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}i$.

Ha a négyzetgyökvonásra használt eljárást kétszer egymás után alkalmazzuk, akkor $\sqrt[4]{u} = \sqrt{\sqrt{u}}$ is meghatározható kanonikus alakban számolva.

6.30. Megjegyzés. A z komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szöget alkotnak, amelynek középpontja az origó.

6.31. Példa. A $z = 1 + 2i$ komplex szám ötödik gyökei $(u_0, \dots, u_4)$:



6.32. Definíció. Az ε komplex számot **n-edik egységgyöknek** nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

6.33. Tétel. Az n-edik egységgyökök $(n \in \mathbb{N})$ éppen az

$$\varepsilon_k^{(n)} \stackrel{\text{def.}}{=} \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

komplex számok. Ezek páronként különböznek, azaz pontosan n darab van belőlük.

6.34. Definíció. A tételben szereplő $\varepsilon_k^{(n)}$ pozitív egész kitevős hatványaiként akkor és csak akkor kapjuk meg az összes n-edik egységgyököt, ha k és n relatív prímek. Az ilyen n-edik egységgyököket **primitív n-edik egységgyököknek** nevezzük.

6.35. Példa. Meghatározzuk a harmadik komplex egységgyököket. A fenti képletet $n = 3$ esetén alkalmazva:

$$k = 0: \quad \varepsilon_0^{(3)} = \cos\frac{0\pi}{3} + i\sin\frac{0\pi}{3} \quad = \quad 1$$

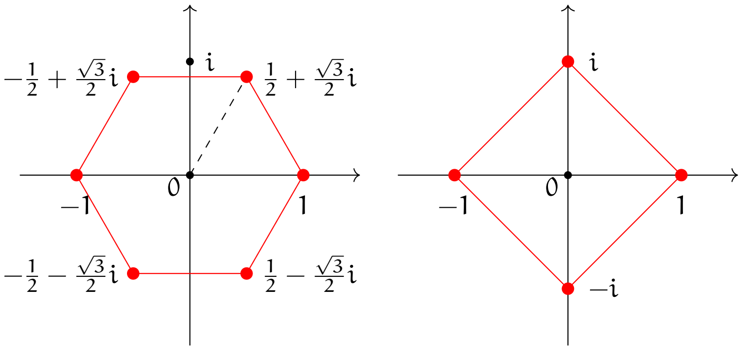
$$k = 1: \quad \varepsilon_1^{(3)} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad = \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \quad \varepsilon_2^{(3)} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad = \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Mivel 1 és 3, illetve 2 és 3 is relatív prímek, így a primitív 3-adik egységgyökök: $\varepsilon_1^{(3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_2^{(3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6.36. Megjegyzés. Az n-edik egységgyökök egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa $\varepsilon_0^{(n)} = 1$.

6.37. Példa. A hatodik és a negyedik egységgyökök:



Az 1 és 6, illetve az 5 és 6 relatív prímek, így a primitív hatodik egységgyökök: $\varepsilon_1^{(6)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_5^{(6)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

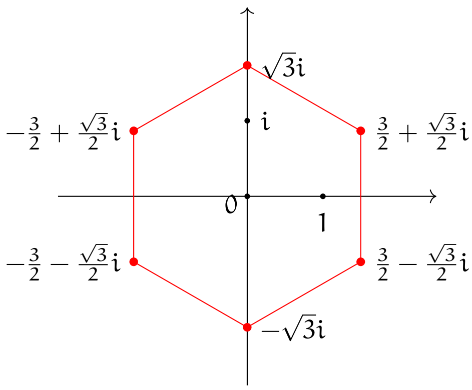
Az 1 és 4, illetve a 3 és a 4 relatív prímek, így a primitív negyedik egységgyökök $\varepsilon_1^{(4)} = i$ és $\varepsilon_3^{(4)} = -i$.

6.38. Tétel. Egy nemnulla komplex szám összes n-edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n-edik gyökét megszorozzuk sorra az n-edik egységgyökökkel. Ha $u_0^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = u_0 \varepsilon_k^{(n)} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

6.39. Példa. Láttuk, hogy $\sqrt[3]{i} = -i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. A három köbgyök közül a „legszebb" $u_0 = -i$ (erre akár számolás nélkül is rá is lehetett volna érezni). Ebből megkaphatjuk a többit a harmadik egységgyökök ismeretében:

$$-i \cdot \varepsilon_0^{(3)} = -i \cdot 1 = -i, \quad -i \cdot \varepsilon_1^{(3)} = -i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -i \cdot \varepsilon_2^{(3)} = -i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$



6.40. Példa. A fenti ábrán a $\sqrt[6]{-27}$ értékeit ábrázoljuk a Gauss-síkon. A -27 abszolút értéke $r = |-27| = 27$, és $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$. A -27 a Gauss- síkon a valós tengely negatív felén található, így argumentuma $\varphi = \pi$. Egyik hatodik gyöke $u_0 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezt megszorozva a 6-odik egységgyökökkel.

Videó: Polinomok

6.5. Polinomok, gyöktényezős felbontás

6.41. Definíció. Legyen T számtest (ld. 6.9. Megjegyzés, 30. old.) és x határozatlan. Tetszőleges n nemnegatív egész szám és $a_0, a_1, \dots, a_n \in T$ elemek esetén az

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(formális) összeget (T feletti x határozatlanú) **polinomnak** nevezzük, ha $a_n \neq 0$ vagy $n = 0$ és $a_n = 0$. Az $a_0, a_1, \dots, a_n$ elemek a polinom **együtthatói**. Ha $a_n \neq 0$, akkor n-et a **polinom fokszámának** nevezzük. Ha $n = 0$ és $a_n = 0$, akkor **zéruspolinomról** beszélünk, amelynek nem tulajdonítunk fokszámot.

A T számtest feletti x határozatlanú polinomok halmazát $T[x]$ jelöli. Az x határozatlan helyett más határozatlant is használhatunk, pl. $\mathbb{C}[z]$.

6.42. Definíció. Legyen $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a T számtest feletti polinom. Tetszőleges $c \in T$ esetén az f polinom c helyen vett **helyettesítési értékén** az $f(c) \stackrel{\text{def.}}{=} a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$ (T-beli) értéket értjük. Az f polinomhoz tartozó **polinomfüggvény** a $T \to T$, $c \mapsto f(c)$ leképezés.

6.43. Definíció. A $c \in T$ elem **gyöke** (más szóval **zérushelye**) az $f \in T[x]$ polinomnak, ha $f(c) = 0$.

6.44. Tétel (Bézout-tétel)**.** Az $f \in T[x]$ polinomnak pontosan akkor gyöke a $c \in T$ elem, ha $f = (x - c)g$ teljesül, valamely $g \in T[x]$ polinomra.

6.45. Példa. Az $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke az 1 valós szám, mert $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Továbbá, $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

6.46. Definíció. Az $f \in T[x]$ polinomnak a $c \in T$ szám **k-szoros gyöke**, ha $f = (x - c)^k g$ és c nem gyöke g-nek. A $k \in \mathbb{N}$ számot a c gyök **multiplicitásának** nevezzük.

6.47. Példa. A 6.45. Példában láttuk, hogy $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$, de $1^2 + 1 - 2 = 0$, azaz 1 gyöke az $x^2 + x - 2$ polinomnak is: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Így kapjuk, hogy $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, tehát az 1 szám kétszeres gyöke f-nek.

6.48. Definíció. Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **gyöktényezős felbontásán** az $f = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$ szorzatot értjük, ahol a $c_i \in T$ $(i = 1, \dots, n)$ elemek az f polinom gyökei.

6.49. Megjegyzés. Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomoknak nem mindig létezik gyöktényezős felbontása a valós számtest felett, például az $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak nincsen valós gyöke, így nem bontható elsőfokú valós együtthatós polinomok szorzatára.

6.50. Példa. A 6.47. Példában szereplő $f = x^3 - 3x + 2 (= (x - 1)^2(x + 2)) \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöktényzős felbontása: $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x - (-2))$. Az f polinomnak 1 kétszeres gyöke, -2 pedig egyszeres gyöke.

Az $(x - c)$ tényező pontosan annyiszor lép fel az f polinom gyöktényezős felbontásában, ahányszoros gyöke c az f polinomnak.

6.51. Tétel (A Klasszikus Algebra Alaptétele)**.** Minden legalább elsőfokú, komplex számtest feletti polinomnak van gyöke a komplex számtestben.

6.52. Következmény. Ha $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ $(a_n \neq 0)$, akkor multiplicitással számolva, n gyöke van. Ha f komplex gyökei $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, akkor f gyöktényezős felbontása: $f = a_n(x - c_1)\dots(x - c_n)$.

6.53. Megjegyzés. Mivel $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, így természetesen az n-edfokú valós együtthatós polinomokra is teljesül, hogy n gyökük van $\mathbb{C}$-ben.

6.54. Példa. Meghatározzuk az $f = z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i \in \mathbb{C}[z]$ másodfokú polinom gyökeit, és megadjuk a gyöktényezős febontását. A gyökök meghatározásához az $z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. Használható a jól ismert megoldóképlet. A diszkrimináns: $D = (-1 + 2i)^2 - 4(1 + 5i) = (1 - 4i - 4) - 4 - 20i = -7 - 24i$. Az f polinom gyökei (a megoldóképlet segítségével meghatározva):

$$z_{1,2} = \frac{-(-1 + 2i) \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2} = \frac{1 - 2i \pm (3 - 4i)}{2},$$

tehát $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = -1 + i$. A gyöktényezős felbontás: $f = 1 \cdot (z - (2 - 3i))(z - (-1 + i))$.

6.55. Példa. (a) Megadjuk az $f = x^3 - i$ polinom gyöktényezős felbontását, felhasználva azt, hogy a 6.28. Példában meghatároztuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit:

$$f = (x - (-i))\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right).$$

(b) Az $f = x^2 + x + 1$ polinomnak a valós számok felett nincs gyöktényezős felbontása, mert az $f(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa -3, de komplex gyökei vannak: $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, így a gyöktényezős felbontása $\mathbb{C}$ felett:

$$f = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right).$$

6.56. Példa. Megadjuk az $f = 3x^5 + 3x^3 - 18x$ polinom gyöktényezős felbontását $\mathbb{C}$ felett. Szorzattá alakítjuk a polinomot: $f = 3x^5 + 3x^3 - 18x = 3x(x^4 + x^2 - 6) = 3x(x^2 - 2)(x^2 + 3) = 3x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$. Tehát f gyökei: 0, $\pm\sqrt{2}$ és $\pm\sqrt{3}i$.

6.57. Tétel. Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és c komplex szám gyöke az f valós együtthatós polinomnak, akkor $\bar{c}$ is gyöke a polinomnak.

6.58. Következmény. Ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom foka páratlan, akkor a 6.57. Tétel következtében f-nek van valós gyöke.

6.6. Interpoláció

6.59. Tétel (Lagrange-féle interpoláció)**.** Legyen T számtest, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ páronként különböző T-beli elemek, valamint $d_0, d_1, \ldots, d_n \in T$. Ekkor létezik egy és csakis egy **legfeljebb n-edfokú** $L \in T[x]$ polinom, amelyre $L(c_0) = d_0,\ L(c_1) = d_1,\ \ldots,\ L(c_n) = d_n$. Ez az L polinom a következő:

$$L = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - c_0)\ldots(x - c_{i-1})(x - c_{i+1})\ldots(x - c_n)}{(c_i - c_0)\ldots(c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1})\ldots(c_i - c_n)} \cdot d_i.$$

6.60. Megjegyzés. Az L polinomot a $c_0, \ldots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az L által meghatározott polinomfüggvény grafikonja átmegy a (c_0, d_0), $(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ pontokon.

6.61. Példa. Legyen $T = \mathbb{R}$, $c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 4, c_3 = 8$ és $d_0 = 2, d_1 = 1, d_2 = 5, d_3 = 7$. Ekkor

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = -\frac{x^3}{21} + \frac{2x^2}{3} - \frac{8x}{3} + \frac{64}{21},$$

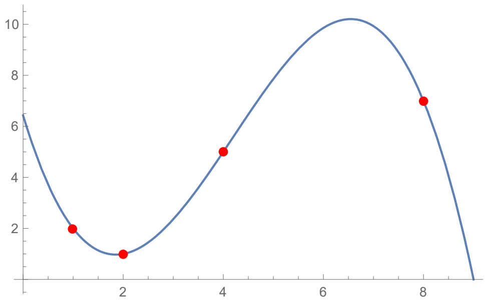
$$L_1 = \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = \frac{x^3}{12} - \frac{13x^2}{12} + \frac{11x}{3} - \frac{8}{3},$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} = -\frac{x^3}{24} + \frac{11x^2}{24} - \frac{13x}{12} + \frac{2}{3},$$

$$L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = \frac{x^3}{168} - \frac{x^2}{24} + \frac{x}{12} - \frac{1}{21}.$$

A Lagrange-féle interpolációs polinom pedig

$$L = 2 \cdot L_0 + 1 \cdot L_1 + 5 \cdot L_2 + 7 \cdot L_3 = -\frac{5x^3}{28} + \frac{9x^2}{4} - \frac{13x}{2} + \frac{45}{7}.$$



28. ábra. Az $(1,2),(2,1)(4,5),(8,7)$ pontok és a rájuk illeszkedő Lagrange-polinom

7. Mátrixok, determinánsok

7.1. Műveletek mátrixokkal

Videó: **Műveletek mátrixokkal**

7.1. Definíció. Az **$(n\times m)$-es valós mátrix** egy „táblázat”, melynek n sora és m oszlopa van. Elemei $\mathbb{R}$ elemei, azaz valós számok. A táblázat elemeit kerek zárójelek közé írjuk. Az $(n\times m)$-es valós mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{n\times m}$ jelöli. Az $\mathbb{R}$ halmaz elemeit **skalároknak** is fogjuk nevezni. A mátrixokat általában latin nagybetűkkel jelöljük $(A,\ B,\ C,\dots)$. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemére használhatjuk az a_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet A_{ij}-vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

Azt mondjuk, hogy az $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ és $B\in\mathbb{R}^{r\times s}$ **mátrixok egyenlőek**, ha $n=r$ és $m=s$ (méretük megegyezik), valamint tetszőleges i és j indexekre $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ teljesül, hogy az $A_{ij}=B_{ij}$ (azonos pozícióban álló elemeik egyenlőek).

7.2. Definíció. Ha A és B azonos méretű, $(n\times m)$-es, mátrixok, akkor összeadhatók (csak azonos méretű mátrixok adhatók össze). Az **összegük** is $(n\times m)$-es mátrix lesz.

Az $A+B$ (összeg)mátrix i-edik sorának j-edik eleme az A mátrix i-edik sora j-edik elemének és a B mátrix i-edik sora j-edik elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adjuk össze:

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}.$$

7.3. Példa.

$$\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&(-2)+(-1)\\3+0&4+1\\2+2&1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\3&5\\4&5\end{pmatrix}$$

7.4. Definíció. Tetszőleges $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ skalár esetén elvégezhető a **skalárral való szorzás**. Az A mátrixot úgy szorozzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val:

$$(\lambda A)_{ij}=\lambda A_{ij}.$$

7.5. Példa.

$$3\cdot\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)&3\cdot2&3\cdot3\\3\cdot1&3\cdot0&3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6&9\\3&0&3\end{pmatrix}$$

7.6. Definíció. **Mátrix transzponáltja** mindig létezik: $(m\times n)$-es mátrix transzponáltja $(n\times m)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopaiba:

$$(A^T)_{ij}=A_{ji}.$$

7.7. Példa.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&0\\-1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\-1&0&1&3\\2&0&1&4\end{pmatrix}$$

7.8. Definíció. Ha A $(k \times m)$-es, B pedig $(m \times n)$-es mátrix, akkor létezik az $A \cdot B$ **szorzatuk**, amely $(k \times n)$-es mátrix. **Más esetben a szorzat nem létezik**/**nem definiált**.

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i-edik sorának j-edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i-edik sorának elemeit B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott szorzatokat összeadjuk.

7.9. Példa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ c_{12} &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5, \\ c_{21} &= (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7, \\ c_{22} &= (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5. \end{aligned}$$

7.10. Definíció. Legyen A $(k \times m)$-es, B pedig $(m \times n)$-es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $(k \times n)$-es, i-edik sorának j-edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,m} b_{m,j} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}.$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV.

7.11. Példa. (a) $A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ nem létezik.

(b) $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

(c) $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7.12. Tétel (A mátrixműveletek tulajdonságai)**.** Valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + B = B + A$,
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$,
- $(A^T)^T = A$,
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

7.2. Speciális mátrixok

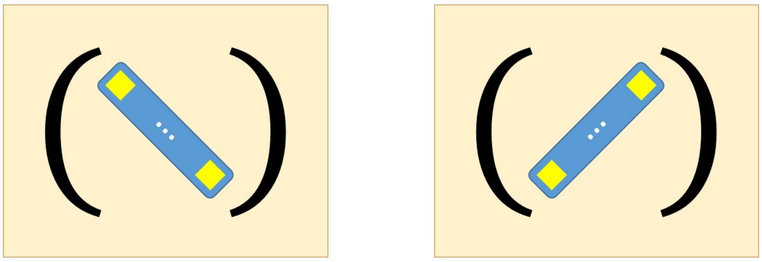
7.13. Definíció. Az A **mátrix szimmetrikus**, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

7.14. Példa. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

mátrix szimmetrikus, a (főátlóra) szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egyenlőek.

7.15. Megjegyzés. Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$-es. Az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix **főátlóját** az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ elemek alkotják. A „másik" átló pedik a **mellékátló**.



29. ábra. Négyzetes mátrix főátlója és mellékátlója

7.16. Definíció. Egy $(n \times n)$-es mátrixot **triangulárisnak** nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

7.17. Példa. A $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ mátrix **felső trianguláris mátrix**, a $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ mátrix **alsó trianguláris mátrix**.

7.18. Definíció. Az $(n \times n)$-es A mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

7.19. Példa. Az

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

mátrix diagonális mátrix, melynek főátlójában rendre az $1, 0, -2, 4$ elemek állnak.

7.20. Definíció. Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jel.: E_n.

7.21. Példa. Az (1×1)-es, (2×2)-es és (3×3)-as egységmátrixok:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(n\times n)$-es egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik az összes $(n\times n)$-es valós mátrixok körében, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

7.22. Definíció. Az $(n \times n)$-es **zérómátrix** (vagy **nullmátrix**) az a mátrix, amelynek minden eleme 0. (Jel.: Z_n vagy 0_n.)

7.23. Példa. Az (1×1)-es, (2×2)-es és (3×3)-as zérómátrixok:

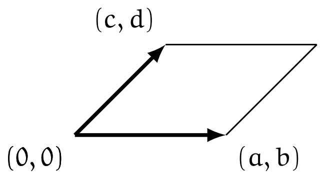
$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $(n \times n)$-es zérómátrix a szorzásra nézve az összes $(n \times n)$-es mátrixok körében úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

7.3. Determinánsok

Tekintsük a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektorokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.



Tehát a paralelogramma területe a determináns abszolútértékeként kapható meg.

7.24. Definíció. A (2×2)-es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ valós mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

CSAK NÉGYZETES MÁTRIXOKNAK VAN DETERMINÁNSA.

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám. Ennek a számnak a jele: $\det(A)$ vagy $|A|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az n természetes számot a $\det(A)$ determináns **rendjének** nevezzük.

7.25. Definíció. Az (1×1)-es $A = (a)$ mátrix determinánsa: $|A| = a$.

Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsához n darab $((n-1) \times (n-1))$-es mátrix determinánsát kell kiszámolni.

7.26. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **aldetermináns** úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak i-edik sorát és j-edik oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij}.

7.27. Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.28. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **adjungált aldetermináns** úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

7.29. Példa.

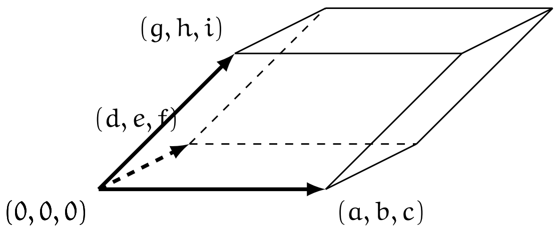
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.30. Definíció. Legyen $n \geqslant 2$ természetes szám. Ekkor az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns első sora szerinti kifejtése:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$



A paralelogramma területét a síkon (2×2)-es mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg. A térben az (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg.

A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végponjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg. \end{aligned}$$

A paralelepipedon térfogata: $V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|$.

7.31. Megjegyzés. A determináns rekurzív definíciója alapján az $(n \times n)$-es determináns $n!$ darab szorzat összegeként számítható ki.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

7.32. Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Ezt az észerevételt felhasználva már egy sokkal gyorsabb módszer adódik determinánsok kiszámítására. Ehhez azonban szükség lesz a determinánsok néhány elemi tulajdonságára.

7.4. Determinánselméleti tételek

7.33. Tétel. Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

7.34. Megjegyzés. A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

7.35. Tétel (Determináns & transzponálás)**.** Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

7.36. Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

7.37. Tétel (Dualitási elv)**.** Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop” és „sor” szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

7.38. Tétel. Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy c valós számmal, akkor a determináns értéke c-szeresére változik.

7.39. Példa.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -11 & 13 \\ 6\cdot 17 & 6\cdot 19 & 6\cdot 23 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = 6\cdot 780.$$

7.40. Tétel. Ha egy determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

7.41. Példa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot 11 = 154.$$

7.42. Tétel (Determináns & Sorcsere)**.** Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1)-szeresére változik.

7.43. Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 120$$

7.44. Tétel (Determináns $= 0$ — elegendő feltételek)**.** Ha a következő feltételek közül valamelyik teljesül, akkor a determináns értéke nulla:

- valamely sorának [oszlopának] minden eleme nulla;
- valamely két sora [oszlopa] azonos;
- valamely két sora [oszlopa] arányos.

7.45. Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -12 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

7.5. Determináns hatékony számítása

7.46. Tétel („Nullázás”)**.** A determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c-szeresét hozzáadjuk.

A Dualitási elv értelmében a fenti tétel oszlopokra is igaz. Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa „kinullázható” vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

7.47. Példa. Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát a 3. eleme, az 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}.$$

Először vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát, majd az 1. sorból vonjuk ki a 3. sor 2-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst kifejthetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

7.48. Tétel (Determinánsok szorzástétele)**.** Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsaik szorzatával egyezik meg.

7.6. Mátrixok sajátértékei

7.49. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük. A p_A polinom valós gyökei pedig az A mátrix **sajátértékei**. (A sajátérték pontosabb definícióját a 9.7 fejezetben fogjuk megadni.)

7.50. Példa. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 10 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ valós mátrix karakterisztikus ploinomja

$$p_A = |A - x \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -2 & 4-x & 4 \\ 10 & 2 & -6-x \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 + 60x - 108 = -(x-6)(x-2)(x+9),$$

ezért A sajátértékei: $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$.

7.7. Mátrixok inverze

7.51. Definíció. Legyen A négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **inverze** A-nak, ha

$$AB = BA = E_n.$$

Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az A mátrixnak inverze a B mátrix, akkor $1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$, így $|A| \neq 0$.

7.52. Definíció. Ha az A mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **nemelfajulónak** nevezzük. Ha az A mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az A mátrix **invertálható**.

7.53. Tétel. Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Azaz az A négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha nemelfajuló.

Ha az A mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű (jel.: A^{-1}).

7.54. Tétel. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.

7.55. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1\end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = 1 \neq 0$ következtében A invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Mátrixok inverze másként is meghatározható, pl. az ún. Gauss-elimináció segítségével. Ezt megoldási módot a lineáris egyenlterendszerek után ismertetjük (8.3. fejezet).

7.56. Tétel. Legyen A és B tetszőleges $(n \times n)$-es invertálható mátrix, ekkor
(a) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7.57. Definíció. Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív egész kitevős hatványai:

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k\ \text{db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

7.58. Definíció. Tetszőleges A $(n \times n)$-es mátrix esetén $A^0 = E_n$.

7.59. Tétel. Legyen A tetszőleges invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor
(a) $A^{m+k} = A^mA^k$,
(b) $(A^m)^k = A^{mk}$.

8. Lineáris egyenletrendszerek

Videó: **Lineáris egyenletrendszerek**

8.1. Definíció. **Lineáris egyenletrendszernek** nevezzük az alábbi objektumot:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

ahol

$x_1, x_2, \dots, x_m$ az ismeretlenek (vagy változók),
az a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ valós számok az együtthatók,
a $b_1, \dots, b_n$ valós számok a jobb oldali konstansok.

8.2. Definíció. Az előző lineáris egyenletrendszer **együttható mátrixa** az alábbi $(n \times m)$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit tartalmazza.

8.3. Definíció. A lineáris egyenletrendszer **bővített mátrixa** (vagy **kiegészített mátrixa**) az alábbi $(n \times (m+1))$-es valós mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right),$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit és a jobb oldali konstansokat tartalmazza.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixszorzás segítségével is felírható. Jelölje az együttható mátrixot $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, a változók által alkotott vektort $x = (x_1, \dots x_m)$, és a jobb oldali konstansokat tartalmazó vektort pedig $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a lineáris egyenletrendszer felírása mátrixokkal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$A \cdot x^T = b^T.$$

Ez az alak a LER **mátrixos alakja**

8.1. Cramer-szabály

8.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer **szabályos**, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlen száma megegyezik, azaz együttható mátrixa négyzetes, továbbá együttható mátrixának determinánsa nem 0.

8.5. Tétel (Cramer-szabály)**.** Ha az

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1m}\cdot x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nm}\cdot x_m = b_n, \end{cases}$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Tehát a fenti tétel (Cramer-szabály) azt mondja ki, hogy pontosan egy megoldás létezik, azaz az $x_1, \dots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek: x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i-edik oszlopot kicseréljük a jobb oldali konstansok b^T oszlopával.

8.6. Példa. Megoldjuk a

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} = -1. \end{cases}$$

LER-t Cramer-szabállyal, ha lehetséges.

A LER mátrixa négyzetes, determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

a LER szabályos, így alkalmazható a Cramer-szabály:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-10}{13}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{7}{13}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{1}{13}.$$

A megoldás vektoros alakban: $\left(-\frac{10}{13}, \frac{7}{13}, \frac{1}{13}\right)$.

A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer

- nem ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz,
- ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz, azonban az együttható mátrix determinánsa 0.

8.2. Gauss-elimináció

Cramer-szabállyal csak a szabályos lineáris egyenletrendszerek oldhatók meg. Olyan módszert keresünk, amellyel tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldható. A bővített mátrixon a következő ún. elemi átalakításokat hajthatjuk végre.

8.7. Definíció. A bővített mátrix **elemi átalakításai** a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

8.8. Megjegyzés. LER-ek „(elemi) ekvivalens átalakításai" a következők:
- a LER két egyenletének cseréje,
- a LER valamelyik egyenletéhez egy másik egyenletének tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- a LER valamelyik egyenletének megszorzása 0-tól különböző valós számmal.

Az elemi átalakítások során a LER megoldásainak halmaza nem változik. Célunk az, hogy elemi átalakítások sorozatával minél több ismeretlent kiküszöböljünk az egyenletekből.

8.9. Példa. Megoldjuk az alábbi LER-t Gauss-eliminációval.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

Először felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Mivel elemi átalakításokkal szeretnénk kiküszöbölni az egyenletekből az ismeretleneket, célszerű olyan sorral nullázni, ami 1-gyel kezdődik, így felcseréljük az első és második sort. Ezután mindig a sor első nemnulla elemével nullázzuk a felette és alatta lévő elemeket.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{[1]\leftrightarrow[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{[2]+(-3)\cdot[1],\ [3]+(-1)\cdot[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1/2)\cdot[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{[1]+(-1)\cdot[2],\ [3]+2\cdot[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A 2. sor alapján $x_3 = 1$, míg az 1. sorból $x_1 = -x_2$ $(x_2 \in \mathbb{R})$ adódik.

8.10. Definíció. Azokat az ismeretleneket, amelyek tetszőleges valós számot felvehetnek értékként **szabad ismeretleneknek** nevezzük, különben pedig a **kötött ismeretlen** elnevezést használjuk.

Az előző lineáris egyenletrendszer esetén x_2 az egyetlen szabad ismeretlen, a kötött ismeretlenek: x_1, x_3. Ha lineáris egyenletrendszer megoldásait vektorokként adjuk meg, akkor a megoldások halmaza: $\{(-x_2, x_2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.

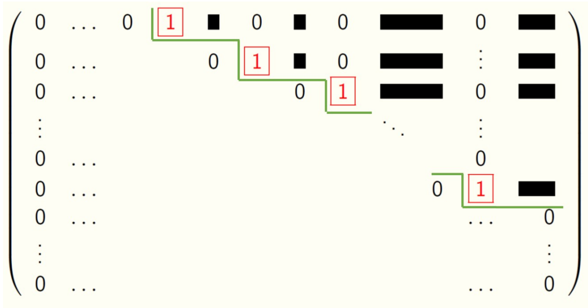
A következő definícióban megadjuk, hogy a Gauss-elimináció végrehajtásával milyen formára lehet alakítani a bővített mátrixot, hogy a LER megoldás könnyen leolvasható legyen.

8.11. Definíció. A zérusmátrix **lépcsős alakú**. Egy valós, nem-zérus mátrixot lépcsős alakúnak nevezünk, ha
- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet $(i_1 < i_2)$, és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elemei, akkor
  - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb" van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme.
- **Redukált lépcsős alakú mátrix**: lépcsős alakú mátrix, továbbá a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák.

Az $\boxed{1}$-sel jelölt elemek a **vezéregyesek** (ld. 30. ábra).

8.12. Tétel. Elemi átalakításokkal (Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

8.13. Megjegyzés. A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz". Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.



30. ábra. Redukált lépcsős alakú mátrix

8.14. Tétel (LER megoldhatósága)**.** Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora **ellentmondó**, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

8.15. Tétel (LER általános megoldása)**.**

- A lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk Gauss-elimináció segítségével.
- A lépcsős alak ismeretében eldöntjük, hogy van-e megoldás (ld. előző tétel).
- Ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakról.
- Ha van megoldás, akkor a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenek lesznek a kötött ismeretelnek. Ha van szabad ismeretlen, akkor végtelen sok megoldás van, különben pontosan egy megoldás van.

8.3. Mátrixok inverze (Gauss-elim.)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, amelynek determinánsa nem 0. Ekkor az A mátrixnak van inverze, ez éppen az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldása. Ez a mátrixegyenlet felírható több olyan lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az együttható mátrix minden esetben A, a jobb oldali konstansok pedig rendre az E_n mátrix oszlopvektorai. Jelölje e_i az E_n mátrix i-edik oszlopvektorát, azaz azt az n-komponensű vektor, amelynek i-edik komponense 1 a többi pedig 0.

Ha megoldjuk az $Ax^T = e_i^T$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ LER-eket, akkor minden egyenletnek pontosan egy megoldása van (ld. Cramer-szabály), ezen megoldások rendre A mátrix inverzének oszlopai. Mivel az együtthatómátrix minden egyenletnél A, így az összes egyenletet egyszerre is megoldhatjuk Gauss-elimináció segítségével: $\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array}\right)$.

8.16. Példa. Meghatározzuk Gauss-eliminációval az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]+2\cdot[1] \\ [3]+(-3)\cdot[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1]+2\cdot[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot[3]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{[1]+(-2)\cdot[3] \\ [2]+(-1)\cdot[3]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Tehát az A mátrix inverze $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ellenőrzésként kiszámolhatjuk az $A \cdot A^{-1}$ és $A^{-1} \cdot A$

szorzatokat:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Vektortér, HLER, sajátérték, sajátvektor

Videó: **Vektortér, lin. függetlenség, generátorrendszer**

9.1. Vektorterek

9.1. Definíció. Legyen n természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám-n-eseknek** nevezzük:

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n),$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ valós számok; a_i az $\mathbf{a}$ valós szám-n-es i-edik **komponense**.

Az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ valós szám-n-esek pontosan akkor **egyenlők**, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

9.2. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az **összeadást** és a **valós számokkal történő szorzást** a következő módon. Ha $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) \stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

9.3. Definíció. Legyen V nemüres halmaz, amin értelmezett az összeadás $(+)$ és a valós számmal való szorzás $(\lambda \cdot \ (\lambda \in \mathbb{R}))$. Ekkor V-t **valós vektortérnek** nevezzük, ha tetszőleges $u, v, w \in V$-re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

1. $u + v = v + u$ (az összeadása kommutatív),
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadása asszociatív),
3. van olyan $\underline{0} \in V$ elem, amelyre $\underline{0} + u = u$,
4. $(-1) \cdot u + u = \underline{0}$,
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
8. $\alpha \cdot u = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = 0$ vagy $u = \underline{0}$.

V elemeit **vektoroknak**, a valós számokat pedig – hagyományosan – **skalároknak** nevezzük.

9.4. Példa. Valós vektorterek: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n \times m}$.

9.5. Definíció. A V vektortér $v_1, \ldots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ vektor. Ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, akkor **triviális lineáris kombinációról** beszélünk.

9.6. Példa. A $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 &= 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1) \\ &= (2, 4, -10),\end{aligned}$$

vagyis a $(2, 4, -10)$ vektor előáll az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

9.2. Lineáris függetlenség

9.7. Definíció. A V valós vektortérbeli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$, ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Különben a vektorrendszer **lineárisan függő**.

9.8. Példa. (a) Az $(1, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, akkor szükségképpen $\alpha = 0$.

(b) Az $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha

$$\underbrace{\alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1)}_{(\alpha, -\alpha+\beta, \beta)} = (0, 0, 0),$$

akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, a harmadik miatt pedig $\beta = 0$.

(c) Ha $v_2 \neq \underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^n$-ben a v_1, v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan α skalár, amelyre $v_1 = \alpha \cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.

9.9. Példa. A térben ($\mathbb{R}^3$-ban) a v_1, v_2, v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba. Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a v_1, v_2, v_3 vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogata kiszámítható a vektorok komponenseiből kialakított (3×3)-as mátrix determinánsának abszolút értékeként. A $V \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan független.

9.10. Példa. Általánosan az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$-es mátrix determinánsa nem 0.

9.11. Tétel (Lineáris függőség – elegendő feltétel)**.** Egy vektorrendszer lineárisan függő, ha az alábbiak valamelyike teljesül

- ha tartalmazza a $\underline{0}$ vektort,
- ha két vektora arányos,
- ha valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként.

9.12. Példa. (a) Az $(1,1,1), (0,0,0)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $0 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,0,0) = (0,0,0)$.

(b) A $(3,3,3), (-5,-5,-5)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $5 \cdot (3,3,3) + 3 \cdot (-5,-5,-5) = (0,0,0)$.

(c) A $(2,0,1,8), (0,4,0,4), (-6,16,-3,-8)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis

$$(-3) \cdot (2,0,1,8) + 4 \cdot (0,4,0,4) = (-6,16,-3,-8).$$

9.13. Tétel. Egy lépcsős alakú mátrix zérusvektortól különböző sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

9.14. Tétel. Legyen $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \ldots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosan akkor lesz a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, ha a mátrix lépcsős alakja nem tartalmaz olyan sort, amelynek minden eleme 0.

9.15. Példa. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi vektorrendszereket. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e.

- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
  a vektorrendszer **lineárisan független**.
- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_4 = (0,2,-4)$:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  a vektorrendszer **lineárisan függő**.
- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$, $v_5 = (2,1,5)$: a vektorrendszer mindenképp **lineárisan függő**, mert $\mathbb{R}^3$ vektortérben 4 vektor esetén a lépcsős alakban mindenképpen lesz legalább egy csak 0-kat tartalmazó sor.

9.3. Generátorrendszer

9.16. Definíció. A $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorok által **generált** vektorok halmaza:

$$[v_1, \ldots, v_k] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

9.17. Definíció. A $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a V vektortérben, ha

$$V = [v_1, \ldots, v_k].$$

9.18. Tétel. Legyen $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \ldots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosan akkor lesz az $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, ha a mátrix lépcsős alakja n darab nemnulla sort tartalmaz.

9.19. Példa. Tekintsük az előző példában szereplő $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszereket. Döntsük el, hogy generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
  három nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.
- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_4 = (0, 2, -4)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
  Két nem nulla sor van, a vektorrendszer **nem generátorrendszer**.
- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$, $v_5 = (2, 1, 5)$:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  három nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.

9.20. Megjegyzés. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszert. Ekkor teljesülnek a következők:
- ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő,
- ha $k < n$, akkor vektorrendszer nem generátorrendszer.

9.4. Bázis, dimenzió, koordinátasor

9.21. Definíció. Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

9.22. Példa. A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.
- Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$-ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- A $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.

9.23. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

9.24. Tétel. Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

9.25. Definíció. A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján**, bázisának közös elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.) A V valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli.

9.26. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektortér n-dimenziós, az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis a vektortér bázisát adja, tehát $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

9.27. Tétel. Ha a V vektortér dimenziója n, akkor
- bármely n-elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V-nek;
- bármely n-elemű generátorrendszere bázisa V-nek.

9.28. Tétel. Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázisa a V valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ valós szám-n-es létezik, amelyre

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

teljesül.

9.29. Definíció. Az előző tételben szereplő $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ valós szám-n-est a v vektor $v_1, \dots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük.

9.30. Példa. A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \dots, a_n)$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \dots, a_n)$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1, 0, \dots, 0)} + \dots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0, \dots, 0, a_n)} .$$

9.31. Példa. Meghatározzuk a $v = (1, 1, 1)$ vektor koordinátasorát az

$$\mathcal{E}\colon v_1 = (1, -1, 2),\ v_2 = (2, -1, 7),\ v_3 = (1, -2, 0)$$

bázisban.

Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1, 1, 1) = \alpha \cdot (1, -1, 2) + \beta \cdot (2, -1, 7) + \gamma \cdot (1, -2, 0).$$

teljesül. Az egyenlőség a következő lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma = 1, \\ (-1) \cdot \alpha + (-1) \cdot \beta + (-2) \cdot \gamma = 1, \\ 2 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 1. \end{cases}$$

A LER bővített mátrixa és annak lépcsős alakja: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$. Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$, tehát a v vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban: $(18, -5, -7)$.

Videó: **Altér, HLER, sajátérték, sajátvektor**

9.5. Altér

9.32. Definíció. A V vektortér U nemüres részhalmaza **altere** V-nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két U-beli vektor összege U-ban van (ha $u, v \in U$, akkor $u + v \in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely U-beli vektort ismét U-beli vektort kapunk (ha $u \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \cdot u \in U$). Jelölés: $U \leqslant V$.

9.33. Tétel. Ha $\underline{0} \notin U$, akkor U nem altér.

9.34. Megjegyzés. Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondtunk, vonatkozik azok altereire is.

9.35. Példa. (a) Tetszőleges V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek, ezek az ún. **triviális alterek**.

(b) A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2, 3) \in U$, $-1 \in \mathbb{R}$, de $(-1) \cdot (2, 3) = (-2, -3) \notin U$ (azaz U nem zárt a skalárokkal való szorzásra). Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor U éppen a pozitív síknegyed.

(c) A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2, 4), (-3, -2) \in U$, de $(2, 4) + (-3, -2) = (-1, 2) \notin U$ (azaz U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

9.36. Példa. A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben az alterek a következők:
- a sík maga egy 2-dimenziós altér;
- az origón ($\underline{0}$-on) átmenő egyenesek 1-dimenziós alterek;
- a $\{\underline{0}\}$ egy 0-dimenziós altér.

9.37. Megjegyzés. Altér megadható:
- generátorrendszer segítségével,
- lineáris egyenletrendszer segítségével.

Mivel $\underline{0}$ mindig eleme az altérnek, így olyan lineáris egyenletrendszerrel adhatjuk meg a vektorokat, ahol a jobb oldali konstansok mind 0-ák.

9.38. Példa. (a) Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $U = [(-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)]$ altere 2-dimenziós, mert a generátorrendszere lineárisan független is, így a vektorok U egy bázisát is adják.

(b) Az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$ altere. Hogyan lehet megadni egy bázisát és a dimenzióját?

9.6. Homogén lineáris egyenletrendszerek (HLER)

9.39. Definíció. Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{1\times m}$ és $x = (x_1, \dots, x_n)$. Az $Ax^T = b^T$ lineáris egyenletrendszer **homogén LER**, ha $b = \underline{0} = (0, \dots, 0)$. Azaz, ha a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & 0 \end{cases}$$

alakú. Jelölje U_A a fenti homogén lineáris egyenletrendszer (HLER) megoldásainak halmazát.

9.40. Megjegyzés. Ekkor U_A az alábbi tulajdonságokkal bír:
1. $\underline{0} \in U_A$ ($\underline{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek),
2. ha $v_1, v_2 \in U_A$, akkor $A{v_1}^T = \underline{0}^T$ és $A{v_2}^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \underline{0}^T + \underline{0}^T = Av_1^T + Av_2^T = A(v_1^T + v_2^T) = A(v_1 + v_2)^T$, így $v_1 + v_2 \in U_A$ (U_A zárt az összeadásra),
3. ha $v \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $Av^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \lambda \cdot \underline{0}^T = \lambda \cdot (Av^T) = A(\lambda \cdot v)^T$, így $\lambda \cdot v \in U_A$ (U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

9.41. Tétel. Ha a homogén lineáris egyenletrendszer n ismeretlent tartalmaz, akkor megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Továbbá egy lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

9.42. Példa. Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

HLER-t. Meghatározzuk a HLER U_A megoldásalterét.

A HLER bővített mátrixa és redukált lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A redukált lépcsős alakból leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó van, továbbá

$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Az U_A altér egy bázisát adják a következő v_1, v_2 vektorok, így U_A 2-dimenziós:
- $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
- $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

Korábban megadtunk egy alteret $\mathbb{R}^4$-ben HLER segítségével, most meghatározzuk a dimenzióját és egy bázisát.

9.43. Példa. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\} \leqslant \mathbb{R}^4$. Ekkor a HLER bővített mátrixa már redukált lépcsős alakú:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A megoldás leolvasható: $x_1 = -x_3 + 2x_4$ és $x_2 = -x_4$ (x_3, x_4), tehát két szabad ismeretlen van: x_3 és x_4, így az altér 2-dimenziós. Egy bázisa megkapható, ha a szabad változóknak az $x_3 = 1$ és $x_4 = 0$, majd $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$ értéket adjuk:

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (2, -1, 0, 1).$$

Tehát a 9.38. Példában a kétféle megadás ugyanazt az alteret adta.

9.7. Sajátértékek

Mátrixok sajátértékeiről röviden már korábban is volt szó (ld. 7.6. fejezet), de most precízebben definiáljuk, és összekapcsoljuk a sajátvektor fogalmával.

A $v \in \mathbb{R}^n$ vektorokat tekinthetjük $v \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mátrixoknak is, így tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén létezik a $v \cdot A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ szorzat.

9.44. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a λ valós szám **sajátértéke**, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

9.45. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ekkor a $\lambda = 2$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (1, -2, 3) \neq \underline{0}$ vektorra $(1, -2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2, -4, 6) = 2 \cdot (1, -2, 3)$.

9.46. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

9.47. Tétel. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

9.48. Példa. Meghatározzuk az $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_2| = \left| \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4 - x & -5 \\ 1 & -2 - x \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 3.$$

Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet megoldásai: 3 és -1. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$.

9.49. Példa. Nem minden valós mátrixnak van sajátértéke. Az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix karakterisztikus polinomja $p_A = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$, amelynek nincs valós gyöke. Így az A mátrixnak nincs valós sajátértéke.

9.8. Sajátvektorok

A sajátérték definíciójában (ld. 9.44. Definíció) szerepelő vektorok szorosan kapcsolódnak a sajátértékhez, ezek lesznek az alábbi definíció szerint a sajátvektorok.

9.50. Definíció. Az A $(n \times n)$-es valós mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Miért a $p_A = |A - xE|$ karakterisztikus polinom gyökei lesznek A sajátértékei? Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$v \cdot A = \lambda \cdot v \iff v \cdot A = v \cdot \lambda \cdot E_n \iff v(A - \lambda \cdot E_n) = \underline{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n)^T \cdot x^T = \underline{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor ennek a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($v = \underline{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0, ami a következő tételt adja.

9.51. Tétel. Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

9.52. Definíció. Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

9.53. Tétel. Az $(A - \lambda \cdot E)^T \underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásterének bázisa egyben az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének is bázisa.

9.54. Példa. Megadjuk az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét. Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - \lambda \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 5 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((3 - \lambda)(-\lambda) - (-2))$$
$$= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)(\lambda - 2x)(\lambda - 1) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1).$$

Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$. Az U_{λ_1} sajátaltér meghatározásához meg kell oldanunk az $(A - \lambda_1 \cdot E_3)^T \cdot \mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-t, melynek bővített mátrixa és redukált lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a redukált lépcsős alakról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, ahol x_3 szabad ismeretlen, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(0, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa a $(0, 1, 1)$ vektor.

VIGYÁZAT: $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\underline{0}$ nem sajátvektor!

10. Az előadásokhoz készített videók jegyzéke

Ítéletkalkulus

Ítéletkalkulus: alapfogalmak
Ítéletkalkulus: logikai ekvivalencia, tautológia, TDNF

Predikátumkalkulus

Predikátumkalkulus

Halmazok

Teljes indukció, rekurzív definíció
Halmazműveletek
Descartes-szorzat, Hatványhalmaz, Osztályozás

Relációk

Alapfogalmak, műveletek
Relációtulajdonságok
Ekvivalenciarelációk
Részbenrendezett halmaz, lezárt

Leképezések, számosságok

Leképezések
Számosságok

Komplex számok, polinomok

Számolás kanonikus alakban
Trigonometrikus, exponenciális alak
Hatványozás, gyökvonás, egységgyökök
Polinomok

Mátrixok, determinánsok

Műveletek mátrixokkal
Determinánsok
Mátrix sajátértéke, inverze

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek

Vektortér, HLER, sajátérték, sajátvektor

Vektortér, lineáris függetlenség, generátorrendszer
Altér, HLER, sajátvektor

Tárgymutató

Irodalom

- D. K. Fagyejev, I. S. Szominszkij: Felsőbb algebrai feladatok, Műszaki Könyvkiadó, 1973, Typotex, 2000.
- Kalmárné Németh M., Katonáné Horváth E., Kámán T.: Diszkrét matematikai feladatok, Polygon, 2003.
- Szabó L.: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2003.
- Szendrei Á.: Diszkrét matematika, Polygon, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002.

- Czédli G.: Diszkrét matematika I. – előadásfóliák (2005-2019)
- Maróti M.: Diszkrét matematika – előadásvázlat