

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

11. előadás

Definíció.

Legyen n természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám- n -eseknek** nevezzük:

$$a = (a_1, \dots, a_n),$$

ahol $a_1, \dots, a_n$ valós számok; a_i az a valós szám- n -es i -edik **komponense**. Az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ valós szám- n -esek pontosan akkor **egyenlők**, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $a_i = b_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Definíció.

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az **összeadást** és a **valós számokkal történő szorzást** a következő módon. Ha $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$
$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Definíció.

Legyen V nemüres halmaz, amin értelmezett az összeadás $(+)$ és a valós számmal való szorzás $(\lambda \cdot (\lambda \in \mathbb{R}))$. Ekkor V -t **valós vektortérnek** nevezzük, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ -re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

- ❶ $u + v = v + u$ (az összeadása kommutatív),
- ❷ $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadása asszociatív),
- ❸ van olyan $\underline{0} \in V$ elem, amelyre $\underline{0} + u = u$,
- ❹ $(-1) \cdot u + u = \underline{0}$,
- ❺ $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
- ❻ $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
- ❼ $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
- ❽ $\alpha \cdot u = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = 0$ vagy $u = \underline{0}$.

A V vektortér elemeit **vektoroknak** nevezzük.

Példa.

Valós vektorterek: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Definíció.

A V vektortér $v_1, \dots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ vektor. Ha $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, akkor **triviális lineáris kombinációról** beszélünk.

Példa.

A $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 &= 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1) \\ &= (2, 4, -10),\end{aligned}$$

vagyis a $(2, 4, -10)$ vektor előáll az $(1, 1, -1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Definíció.

A V valós vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$, ha $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Különben a vektorrendszer **lineárisan függő**.

Példa.

- Az $(1, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, akkor szükségképpen $\alpha = 0$.
- Az $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha

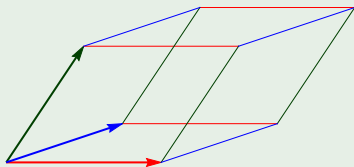
$$\underbrace{\alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1)}_{(\alpha, -\alpha + \beta, \beta)} = (0, 0, 0),$$

akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, a harmadik miatt pedig $\beta = 0$.

- Ha $v_2 \neq \underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^n$ -ben a v_1, v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan α skalár, amelyre $v_1 = \alpha \cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.

Példa.

A térben ($\mathbb{R}^3$ -ban) a v_1, v_2, v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba.



Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a v_1, v_2, v_3 vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogata kiszámítható a vektorok komponenseiből kialakított (3×3) -as mátrix determinánsának abszolút értékeként. A $V \neq 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan független.

Példa.

Általánosan az $\mathbb{R}^n$ -beli $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$ -es mátrix determinánsa nem 0.

Tétel.

Egy vektorrendszer lineárisan függő,

- ha tartalmazza a $\underline{0}$ vektort,
- ha két vektora arányos,
- ha valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Példa.

- Az $(1, 1, 1), (0, 0, 0)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $0 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
- A $(3, 3, 3), (-5, -5, -5)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $5 \cdot (3, 3, 3) + 3 \cdot (-5, -5, -5) = (0, 0, 0)$.
- A $(2, 0, 1, 8), (0, 4, 0, 4), (-6, 16, -3, -8)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $(-3) \cdot (2, 0, 1, 8) + 4 \cdot (0, 4, 0, 4) = (-6, 16, -3, -8)$.

Tétel.

Egy lépcsős alakú mátrix zérusvektortól különböző sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Tétel.

Legyen $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \dots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosán akkor lesz a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, ha a mátrix lépcsős alakja nem tartalmaz olyan sort, amelynek minden eleme 0.

Példa.

Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi vektorrendszereket. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a vektorrendszer **lineárisan független**.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_4 = (0, 2, -4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a vektorrendszer **lineárisan függő**.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$, $v_5 = (2, 1, 5)$:

a vektorrendszer mindenképp **lineárisan függő**, mert $\mathbb{R}^3$ vektortérben 4 vektor esetén a lépcsős alakban mindenképpen lesz legalább egy csak 0-kat tartalmazó sor.

Definíció.

A $v_1, \dots, v_k \in V$ által **generált** vektorok halmaza:

$$[v_1, \dots, v_k] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Definíció.

A $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a V vektortérben, ha

$$V = [v_1, \dots, v_k].$$

Tétel.

Legyen $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \dots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosán akkor lesz az $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer generátorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben, ha a mátrix lépcsős alakja n darab nemnulla sort tartalmaz.

Példa.

Tekintsük az előző példában szereplő $\mathbb{R}^3$ -beli vektorrendszereket. Döntsük el, hogy generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

három nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_4 = (0, 2, -4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Két nem nulla sor van, a vektorrendszer **nem generátorrendszer**.

Példa. (folyt.)

- $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$, $v_5 = (2, 1, 5)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

három nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.

Megjegyzés.

Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ -beli $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszert. Ekkor teljesülnek a következők:

- ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő,
- ha $k < n$, akkor vektorrendszer nem generátorrendszer.

Definíció.

Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

Példa.

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$ -ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- A $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$ -ban.

Definíció.

A V vektorteret **véges dimenziós**nak nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

Tétel.

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Definíció.

A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján**, bázisának közös elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.) A V valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli.

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortér n -dimenziós, az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis a vektortér bázisát adja, tehát $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Feladat.

Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $v_1 = (1, -2), v_2 = (2, -4);$

(b) $v_1 = (1, -4, 5), v_2 = (-1, 3, 4);$

(c) $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 2, 6), v_3 = (2, -2, -1), v_4 = (-1, -1, -4);$

(d) $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 2, 6), v_3 = (2, -2, -1).$

Megoldás: ld. előadáson.

Tétel.

Ha a V vektortér dimenziója n , akkor

- bármely n -elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V -nek;
- bármely n -elemű generátorrendszere bázisa V -nek.

Tétel.

Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázisa a V valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ valós szám- n -es létezik, amelyre

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

teljesül.

Definíció.

Az előző tételben szereplő $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ valós szám- n -est a v vektor $v_1, \dots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük.

Példa.

A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \dots, a_n)$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \dots, a_n)$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1, 0, \dots, 0)} + \dots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0, \dots, 0, a_n)} .$$

Példa.

Meghatározzuk a $v = (1, 1, 1)$ vektor koordinátasorát az

$$\mathcal{E}: v_1 = (1, -1, 2), \quad v_2 = (2, -1, 7), \quad v_3 = (1, -2, 0)$$

bázisban.

Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1, 1, 1) = \alpha \cdot (1, -1, 2) + \beta \cdot (2, -1, 7) + \gamma \cdot (1, -2, 0).$$

teljesül. Az egyenlőség a következő lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma = 1, \\ (-1) \cdot \alpha + (-1) \cdot \beta + (-2) \cdot \gamma = 1, \\ 2 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 1. \end{cases}$$

Példa. (folyt.)

A LER bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$, tehát a v vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban: $(18, -5, -7)$.

Definíció.

A V vektortér U nemüres részhalmaza **altere** V -nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két U -beli vektor összege U -ban van (ha $u, v \in U$, akkor $u + v \in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely U -beli vektort ismét U -beli vektort kapunk (ha $u \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \cdot u \in U$). Jelölés: $U \leq V$.

Tétel.

Ha $\underline{0} \notin U$, akkor U nem alter.

Megjegyzés.

Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondtunk, vonatkozik azok altereire is.

Példa.

- Tetszőleges V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek, ezek az ún. **triviális alterek**.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2, 3) \in U$, $-1 \in \mathbb{R}$, de $(-1) \cdot (2, 3) = (-2, -3) \notin U$ (azaz U nem zárt a skalárokkal való szorzásra).
 - Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor U éppen a pozitív síknegyed.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2, 4), (-3, -2) \in U$, de $(2, 4) + (-3, -2) = (-1, 2) \notin U$ (azaz U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

Példa.

A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$ -ben az alterek a következők:

- a sík maga egy 2-dimenziós altér;
- az origón ($\underline{0}$ -on) átmenő egyenesek 1-dimenziós alterek;
- a $\{\underline{0}\}$ egy 0-dimenziós altér.

Megjegyzés.

Altér megadható:

- generátorrendszer segítségével,
- lineáris egyenletrendszer segítségével.

Mivel $\underline{0}$ mindig eleme az altérnek, így olyan lineáris egyenletrendszerrel adhatjuk meg a vektorokat, ahol a jobb oldali konstansok mind 0-ák.

Példa.

- Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $U = [(-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)]$ altere 2-dimenziós, mert a generátorrendszere lineárisan független is, így a vektorok U egy bázisát is adják.
- Az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$ altere. Hogyan lehet megadni egy bázisát és a dimenzióját?

Definíció.

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ és $x = (x_1, \dots, x_n)$. Az $Ax^T = b^T$ lineáris egyenletrendszer **homogén LER**, ha $b = \underline{0} = (0, \dots, 0)$. Azaz, ha a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

alakú. Jelölje U_A a fenti homogén lineáris egyenletrendszer (HLER) megoldásainak halmazát.

Megjegyzés.

Ekkor U_A az alábbi tulajdonságokkal bír:

- 1 $\underline{0} \in U_A$ ($\underline{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek),
- 2 ha $v_1, v_2 \in U_A$, akkor $Av_1^T = \underline{0}^T$ és $Av_2^T = \underline{0}^T$, aminek következtében
$$\underline{0}^T = \underline{0}^T + \underline{0}^T = Av_1^T + Av_2^T = A(v_1^T + v_2^T) = A(v_1 + v_2)^T, \text{ így } v_1 + v_2 \in U_A$$
(U_A zárt az összeadásra),
- 3 ha $v \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $Av^T = \underline{0}^T$, aminek következtében
$$\underline{0}^T = \lambda \cdot \underline{0}^T = \lambda \cdot (Av^T) = A(\lambda \cdot v)^T, \text{ így } \lambda \cdot v \in U_A$$
(U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

Tétel.

Ha a homogén lineáris egyenletrendszer n ismeretlent tartalmaz, akkor megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben. Továbbá egy lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

Példa.

Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-t. Meghatározzuk a HLER U_A megoldásterét.

A HLER bővített mátrixa:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Példa. (folyt.)

$$\dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

A redukált lépcsős alakból leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó van, továbbá

$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Az U_A altér egy bázisát adják a következő v_1, v_2 vektorok, így U_A 2-dimenziós:

- $x_2 = 1, x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
- $x_2 = 0, x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

Korábban megadtunk egy alteret $\mathbb{R}^4$ -ben HLER segítségével, most meghatározzuk a dimenzióját és egy bázisát.

Példa.

Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$.
Ekkor a HLER bővített mátrixa már redukált lépcsős alakú:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

A megoldás leolvasható: $x_1 = -x_3 + 2x_4$ és $x_2 = -x_4$ (x_3, x_4), tehát két szabad ismeretlen van: x_3 és x_4 , így az altér 2-dimenziós. Egy bázisa megkapható, ha a szabad változóknak az $x_3 = 1$ és $x_4 = 0$, majd $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$ értéket adjuk:

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (2, -1, 0, 1).$$

Tehát a korábbi példában a kétféle megadás ugyanazt az alteret adta.

Mátrixok sajátvektorai

Az előző előadáson szerepelt a következő definíció.

Definíció.

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a λ valós szám **sajátértéke**, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Definiálható a sajátvektor fogalma is.

Definíció.

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Miért a $p_A = |A - xE|$ karakterisztikus polinom gyökei lesznek A sajátértékei?

Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$\begin{aligned} v \cdot A &= \lambda \cdot v \iff v \cdot A = v \cdot \lambda \cdot E_n \\ &\iff v(A - \lambda \cdot E_n) = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n)^T \cdot \underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor ennek a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($v = 0$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0, ami a következő tételt adja.

Tétel.

Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

Definíció.

Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

Tétel.

Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)^T \underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásterének egy bázisa.

Példa.

Megadjuk az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

❶ Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p_A &= |A - \lambda \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 5 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(-\lambda) - (-2)] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

❷ Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

❸ Az $U_{\lambda_1} = U_1$ sajátaltér meghatározása (következő dia).

Példa. (folyt.)

Az $U_{\lambda_1} = U_1$ sajátaltér meghatározása:

Meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3)^T \cdot x^T = \underline{0}^T$ HLER-t, melynek bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a redukált lépcsős alakról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, ahol x_3 szabad ismeretlen, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa a $(0, 1, 1)$ vektorrendszer.

VIGYÁZAT: $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\underline{0}$ nem sajátvektor!