

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

9. előadás

Mátrixok

Definíció.

Az $(n \times m)$ -es **valós mátrix** egy „táblázat”, melynek n sora és m oszlopa van. Elemei $\mathbb{R}$ elemei, azaz valós számok. A táblázat elemeit kerek zárójelek közé írjuk.

Jelölés.

- A mátrixokat általában latin nagybetűkkel jelöljük ($A, B, C, \dots$). Az $A \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- Mátrix elemei: a B mátrix i -edik sorának j -edik elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet B_{ij} -vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$$\mathbb{R}^{n \times m} \ (n, m \in \mathbb{N}) \quad i \begin{pmatrix} & j & \\ & \vdots & \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Definíció.

Ha A és B azonos méretű, $(n \times m)$ -es, mátrixok, akkor összeadhatók (csak azonos méretű mátrixok adhatók össze). Az **összegük** is $(n \times m)$ -es mátrix lesz.

Az $A + B$ összegmátrix i -edik sorának j -edik eleme az A mátrix i -edik sora j -edik elemének és a B mátrix i -edik sora j -edik elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adjuk össze:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & (-2)+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal: szorzás skalárral

Definíció.

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár (szám) esetén elvégezhető a **skalárral (számmal) való szorzás**. Az A mátrixot úgy szorozzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ -val:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

Példa.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal: transzponálás

Definíció: transzponált.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(m \times n)$ -es mátrix transzponáltja $(n \times m)$ -es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopaiba:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal: transzponálás

Definíció: transzponált.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(m \times n)$ -es mátrix transzponáltja $(n \times m)$ -es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopaiba:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{1} & -1 & 2 \\ -1 & \color{red}{0} & 1 & 3 \\ 2 & \color{red}{0} & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal: transzponálás

Definíció: transzponált.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(m \times n)$ -es mátrix transzponáltja $(n \times m)$ -es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopaiba:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal: transzponálás

Definíció: transzponált.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(m \times n)$ -es mátrix transzponáltja $(n \times m)$ -es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopaiba:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \color{red}{2} \\ -1 & 0 & 1 & \color{red}{3} \\ 2 & 0 & 1 & \color{red}{4} \end{pmatrix}$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$c_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4,$$

$$c_{12} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5,$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7,$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5.$$

Definíció.

Ha A ($k \times m$)-es, B pedig ($m \times n$)-es mátrix, akkor létezik az $A \cdot B$ **szorzatuk**, amely ($k \times n$)-es mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i -edik sorának j -edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i -edik sorának elemeit B j -edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Definíció.

Legyen A ($k \times m$)-es, B pedig ($m \times n$)-es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{j1}} & \textcolor{red}{a_{j2}} & \dots & \textcolor{red}{a_{jm}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \textcolor{green}{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \textcolor{green}{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & \textcolor{green}{b_{mj}} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix ($k \times n$)-es, i -edik sorának j -edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = \textcolor{red}{a_{i,1}} \textcolor{green}{b_{1,j}} + \textcolor{red}{a_{i,2}} \textcolor{green}{b_{2,j}} + \dots + \textcolor{red}{a_{i,m}} \textcolor{green}{b_{m,j}} = \sum_{t=1}^m \textcolor{red}{a_{it}} \cdot \textcolor{green}{b_{tj}}.$$

Feladat.

Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: ld. előadáson.

Mátrixok szorzása nem kommutatív!

Példa.

- $A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ de } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ nem}$$

létezik.

- $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ de } \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3).$$

- $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ de } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel.

- $(A + B) + C = A + (B + C),$
- $A + B = B + A,$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A,$
- $(A^T)^T = A,$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$

Valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

Jelölés.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}.$

Szimmetrikus mátrixok

Definíció.

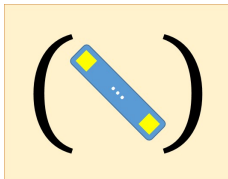
Az A **mátrix szimmetrikus**, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$ -es. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix **főátlóját** az $a_{11}, \dots, a_{nn}$ elemek alkotják.



Trianguláris mátrixok

Definíció.

Egy $(n \times n)$ -es mátrixot **triangulárisnak** nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa.

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
 (felső trianguláris mátrix),

- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
 (alsó trianguláris mátrix).

Definíció.

Az $(n \times n)$ -es A mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definíció.

Az $(n \times n)$ -es **egységmátrix** az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n .

Példa.

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

Definíció.

Az $(n \times n)$ -es **zérómátrix** (vagy nullmátrix) az a mátrix, amelynek minden eleme 0. (Jel.: Z_n vagy 0_n .)

Példa.

$$Z_1 = (0), \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

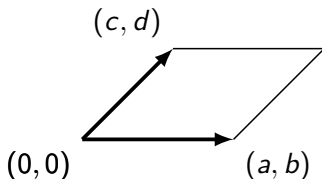
A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

Determinánsok

Paralelogramma területe

Tekintsük a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektorokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.



Tehát a paralelogramma területe a determináns abszolútértékeként kapható meg.

Definíció.

A (2×2) -es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ valós mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa.

Jelölés.

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám. Ennek a számnak a jele: $\det(A)$ vagy $|A|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az n természetes számot a $\det(A)$ determináns **rendjének** nevezzük.

Definíció.

Az (1×1) -es $A = (a)$ mátrix determinánása: $|A| = a$.

Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $(n \times n)$ -es mátrix determinánásához n darab $((n - 1) \times (n - 1))$ -es mátrix determinánását kell kiszámolni.

Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns i -edik sorának j -edik eleméhez tartozó **aldetermináns** úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak i -edik sorát és j -edik oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij} .

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

determináns i -edik sorának j -edik eleméhez tartozó **adjungált aldetermináns** úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determináns első sora szerinti kifejtése

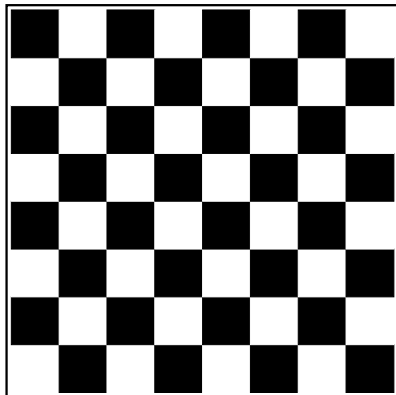
Definíció.

Legyen $n \geq 2$ természetes szám.
Ekkor az

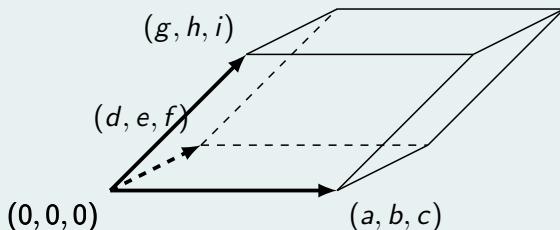
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns első sora szerinti
kifejtése:

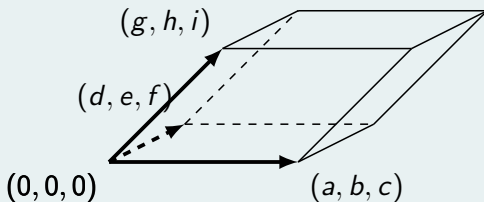
$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j}.$$



Paralelepipedon térfogata



A paralelogramma területét a síkon (2×2) -es mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg. A térben az (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg.



A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végpontjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata: $V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|$.

Megjegyzés.

A determináns rekurzív definíciója alapján az $(n \times n)$ -es determináns $n!$ darab szorzat összegeként számítható ki.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Ezt az észrevételt felhasználva már egy sokkal gyorsabb módszer adódik determinánsok kiszámítására. Ehhez azonban szükség lesz a determinánsok néhány elemi tulajdonságára.

Tétel.

Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i -edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j -edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Megjegyzés.

A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

Determináns & transzponálás

Tétel.

Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tétel (Dualitási elv).

Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop” és „sor” szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

Tétel.

Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy c valós számmal, akkor a determináns értéke c -szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -11 & 13 \\ 6 \cdot 17 & 6 \cdot 19 & 6 \cdot 23 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = 6 \cdot 780.$$

Tétel.

Ha egy determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154.$$

Tétel.

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1) -szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 120$$

Determináns = 0 — elegendő feltételek

Tétel.

Ha a következő feltételek közül valamelyik teljesül, akkor a determináns értéke nulla:

- valamely sorának [oszlopának] minden eleme nulla;
- valamely két sora [oszlopa] azonos;
- valamely két sora [oszlopa] arányos.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -12 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

„Nullázás”

Tétel.

A determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c -szeresét hozzáadjuk.

A Dualitási elv értelmében a fenti tétel oszlopokra is igaz. Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa „kinullázható” vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

Példa.

Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát a 3. eleme, az 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}.$$

Példa. (folyt.)

Először vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

majd az 1. sorból vonjuk ki a 3. sor 2-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst kifejtethetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

Tétel.

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsaik szorzatával egyezik meg.

Feladat.

Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Megoldás: ld. előadáson.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- A $C^T \cdot A$ mátrix elemeinek összege 13.

$$C^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az elemek összege 12, így az állítás **hamis**.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Az A^2 mátrixnak eleme a 7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix},$$

így **igaz** az állítás.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- A $2B + A^T$ mátrix elemeinek összege -3 .

$$2B + A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

elemeinek összege -4 , az állítás **hamis**.

E-teszt: Determináns, sajátérték, inverz (1. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy a determinánsokra vonatkozó alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve hamisak.

- $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$

- A $v_1 = (2, 6, 4)$, $v_2 = (-1, 0, 4)$, $v_3 = (0, 0, 4)$ helyvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata 23.

- $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \geq -23.$

E-teszt.

- $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$

- Az első oszlopa szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \text{ míg}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 22, \text{ így } \mathbf{igaz} \text{ az állítás.}$$

E-teszt.

- A $v_1 = (2, 6, 4)$, $v_2 = (-1, 0, 4)$, $v_3 = (0, 0, 4)$ helyvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata 23.
- A paralelepipedon térfogata a vektorokból előállított 3-ad rendű determináns abszolútértéke. A determinánst az utolsó sora szerint

kifejtve:
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 24, \text{ tehát}$$

hamis az állítás.

E-teszt.

- $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \geq -23.$

- A determináns az első sora szerint kifejtve: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} =$

$$3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} + 0 + (-7) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -19 \geq -23,$$

így **igaz** az állítás.