

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

8. előadás

Komplex számok

2. rész

Komplex számok hatványozása

Az előző előadás során láttuk, hogy a trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $u = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ nemnulla komplex számok esetén a szorzat:

$$zu = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)),$$

továbbá

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Így adódik a hatványozásra a következő tétel.

Tétel (Moivre-képlet).

Ha n egész szám és $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám, akkor

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Példa.

Kiszámoljuk a $z = -1 + i$ komplex szám 30-adik hatványát.

A z komplex szám trigonometrikus alakjához meg kell határoznunk z abszolút értékét (r) és az argumentumát (φ). Az abszolút értéke:

$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. A z komplex szám a 2. síknegyedben helyezkedik el a komplex számsíkon, a valós és képzetes rész abszolút értéke megegyezik, így $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Tehát $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ és

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{30} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{30} \\ &= \sqrt{2}^{30} \left(\cos \left(30 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(30 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2^{15} \left(\cos \left(22\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(22\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 2^{15} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2^{15}i. \end{aligned}$$

FONTOS, hogy 22π azért hagyható el, mert π -nek PÁROS többszöröse.

Feladat.

Határozzuk meg a $z = -\sqrt{3} - i$ komplex szám 10. hatványát kanonikus alakban.

Megoldás: ld. előadáson.

Definíció.

Tetszőleges n pozitív egész szám és $u \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy a z komplex szám **n -edik gyöke** u -nak, ha $z^n = u$.

Tétel.

Minden nemnulla komplex számnak pontosan n különböző n -edik gyöke van. Az $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n -edik gyökei:

$$\sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bizonyítás.

Keressük az u komplex szám n -edik gyökeit $z = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ alakban. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = u = z^n = s^n(\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s = \sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi = \varphi + 2k\pi$, azaz $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad $k = 0, 1, \dots, n-1$ esetén. ◇

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Példa.

Meghatározzuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit. Az i komplex szám a képzetes egység, abszolút értéke $r = 1$, és a képzetes tengely pozitív felén található, így argumentuma $\varphi = \frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus alak $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, tehát az $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ és $n = 3$ szereposztással alkalmazhatjuk a fenti képletet.

$$k = 0 : \quad \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 0\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 0\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1 : \quad \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2 : \quad \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Feladat.

Határozzuk meg a $z = -27$ komplex szám 3. gyökeit kanonikus alakban.

Megoldás: ld. előadáson.

Gyökvonás kanonikus alakban

Az előző előadáson beláttuk, hogy a $z^2 = u$ egyenlet tetszőlegesen adott u komplex szám esetén megoldható, azaz $\sqrt{u}$ kanonikus alakban számolva is meghatározható.

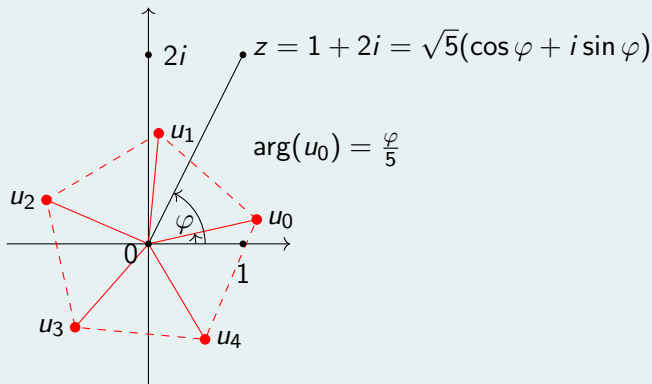
Példa.

- A $z^2 = -5$ egyenlet megoldásával az előző előadáson megkaptuk, hogy $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$.
- A $z^2 = -9 + 12i$ egyenletet megoldottuk az előző előadáson úgy, hogy egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet oldottunk meg a valós számok halmazán, és megkaptuk, hogy $\sqrt{-9 + 12i} = \pm\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}i$.

Ha a négyzetgyökvonásra használt eljárást kétszer egymás után alkalmazzuk, akkor $\sqrt[4]{u}$ is meghatározható kanonikus alakban számolva.

Megjegyzés.

A z komplex szám n -edik gyökei egy szabályos n -szöget alkotnak, amelynek középpontja az origó. Például, a $z = 1 + 2i$ komplex szám ötödik gyökei ($u_0, \dots, u_4$):



Egységgyökök és primitív egységgyökök

Definíció.

Az ε komplex számot **n -edik egységgyöknek** nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

Tétel.

Az n -edik egységgyökök ($n \in \mathbb{N}$) éppen az

$$\varepsilon_k^{(n)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

komplex számok. Ezek páronként különböznek, azaz pontosan n darab van belőlük.

Definíció.

A tételben szereplő $\varepsilon_k^{(n)}$ pozitív egész kitevős hatványaiként akkor és csak akkor kapjuk meg az összes n -edik egységgyököt, ha k és n relatív prím. Az ilyen n -edik egységgyököket **primitív n -edik egységgyököknek** nevezzük.

Példa.

Meghatározzuk a harmadik komplex egységgyököket. A fenti képletet $n = 3$ esetén alkalmazva:

$$k = 0 : \quad \varepsilon_0^{(3)} = \cos \frac{0\pi}{3} + i \sin \frac{0\pi}{3} = 1$$

$$k = 1 : \quad \varepsilon_1^{(3)} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 : \quad \varepsilon_2^{(3)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

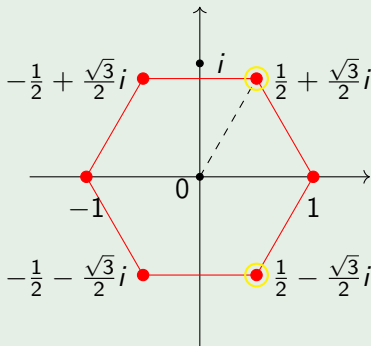
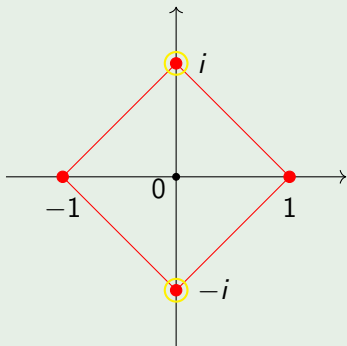
Mivel 1 és 3, illetve 2 és 3 is relatív prímek, ezért a primitív 3-adik egységgyökök: $\varepsilon_1^{(3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_2^{(3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Megjegyzés.

Az n -edik egységgyökök egy szabályos n -szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek körülírt köre az origó középpontú egységgör, és egyik csúcsa $\varepsilon_0^{(n)} = 1$.

Példa.

A negyedik és a hatodik egységgyökök:



Az 1 és 4, illetve a 3 és 4 egészek relatív prímek, így a primitív negyedik egységgyökök $\varepsilon_1^{(4)} = i$ és $\varepsilon_3^{(4)} = -i$.

Az 1 és 6, illetve az 5 és 6 egészek relatív prímek, így a primitív hatodik egységgyökök: $\varepsilon_1^{(6)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_5^{(6)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tétel.

Egy nemnulla komplex szám összes n -edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n -edik gyökét megszorozzuk sorra az n -edik egységgyökökkel. Ha $u_0^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n -edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = u_0 \varepsilon_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Példa.

Láttuk, hogy $\sqrt[3]{i} = -i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. A három köbgyök közül a „legszebb” $u_0 = -i$ (erre akár számolás nélkül is rá is lehetett volna érezni). Ebből megkaphatjuk a többi a harmadik egységgyökök ismeretében:

$$-i \cdot \varepsilon_0^{(3)} = -i \cdot 1 = -i,$$

$$-i \cdot \varepsilon_1^{(3)} = -i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$-i \cdot \varepsilon_2^{(3)} = -i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

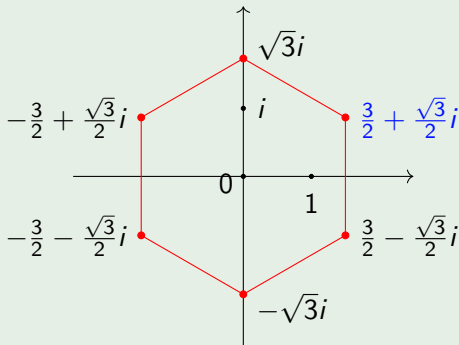
Példa.

Ábrázoljuk $\sqrt[6]{-27}$ értékeit a Gauss-síkon.

A $z = -27$ komplex szám abszolút értéke $r = |-27| = 27$, és $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$.

A -27 komplex szám a Gauss-síkon a valós tengely negatív felén található, így argumentuma $\varphi = \pi$. Egyik hatodik gyöke

$u_0 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezt megszorozva a 6-odik egységgyökökkel adódnak -27 hatodik gyökei:



Polinomok

Definíció.

Legyen T számtest és x határozatlan. Tetszőleges n nemnegatív egész szám és $a_0, a_1, \dots, a_n \in T$ elemek esetén az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

(formális) összeget (T feletti x határozatlanú) **polinomnak** nevezzük, ha $a_n \neq 0$ vagy $n = 0$ és $a_n = 0$. Az $a_0, a_1, \dots, a_n \in T$ elemek az (1) polinom együtthatói. Ha $a_n \neq 0$, akkor n -et a **polinom fokszámának** nevezzük. Ha $n = 0$ és $a_n = 0$, akkor **nullapolinomról/zéruspolinomról** beszélünk, amelynek nem tulajdonítunk fokszámot.

A T számtest feletti x határozatlanú polinomok halmazát $T[x]$ jelöli. Az x határozatlan helyett más határozatlant is használhatunk, pl. $\mathbb{C}[z]$.

Definíció.

Legyen $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a T számtest feletti polinom. Tetszőleges $c \in T$ esetén az f polinom c helyen vett **helyettesítési értékén** az $f(c) \stackrel{\text{def.}}{=} a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ (T -beli) értéket értjük. Az f polinomhoz tartozó **polinomfüggvény** a

$$T \rightarrow T, \quad c \mapsto f(c)$$

leképezés.

Definíció.

A $c \in T$ elem **gyöke** (más szóval **zérushelye**) az $f \in T[x]$ polinomnak, ha $f(c) = 0$.

Tétel (Bézout-tétel).

Az $f \in T[x]$ polinomnak pontosan akkor gyöke a $c \in T$ elem, ha $f = (x - c)g$ teljesül, valamely $g \in T[x]$ polinomra.

Polinomok többszörös gyökei

Példa.

Az $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke az 1, mert $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Továbbá, $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$. Sőt, $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$, de $1^2 + 1 - 2 = 0$, azaz 1 gyöke az $x^2 + x - 2$ polinomnak is: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Így kapjuk, hogy $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. Ekkor azt szoktuk mondani, hogy az 1 szám kétszeres gyöke f -nek.

Definíció.

Az $f \in T[x]$ polinomnak a $c \in T$ szám **k -szoros gyöke**, ha $f = (x - c)^k g$, és c nem gyöke g -nek. A $k \in \mathbb{N}$ számot a c gyök **multiplicitásának** nevezzük.

Definíció.

Az $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **gyöktényezős felbontásán** az $f = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$ szorzatot értjük, ahol a $c_i \in T$ ($i = 1, \dots, n$) elemek az f polinom gyökei.

Megjegyzés.

Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomoknak nem mindig létezik gyöktényezős felbontása a valós számtest felett, például az $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak nincsen valós gyöke, így nem bontható elsőfokú valós együtthatós polinomok szorzatára. (A diszkrimináns negatív: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.)

Példa.

A korábbi példában szereplő $f = x^3 - 3x + 2 (= (x - 1)^2(x + 2)) \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöktényezős felbontása:

$$f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x - (-2)).$$

Az f polinomnak 1 kétszeres gyöke, -2 pedig egyszeres gyöke.

Mindig igaz, hogy az $(x - c)$ tényező pontosan annyiszor lép fel az f polinom gyöktényezős felbontásában, ahányszoros gyöke c az f polinomnak.

A Klasszikus Algebra Alaptétele

Tétel (A Klasszikus Algebra Alaptétele).

Minden legalább elsőfokú, komplex számtest feletti polinomnak van gyöke a komplex számtestben.

Következmény.

Ha $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ ($a_n \neq 0$), akkor multiplicitással számolva, n darab gyöke van. Ha f komplex gyökei $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, akkor f gyöktényezős felbontása: $f = a_n(x - c_1) \dots (x - c_n)$.

Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, így természetesen az n -edfokú valós együtthatós polinomokra is teljesül, hogy n gyökük van $\mathbb{C}$ -ben.

Példa.

Meghatározzuk az $f = z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i \in \mathbb{C}[z]$ másodfokú polinom gyökeit, és megadjuk a gyöktényezős felbontását.

A gyökök meghatározásához az $z^2 + (-1 + 2i)z + 1 + 5i = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. Használható a jól ismert megoldóképlet. A diszkrimináns:

$D = (-1 + 2i)^2 - 4(1 + 5i) = (1 - 4i - 4) - 4 - 20i = -7 - 24i$. (A diszkrimináns négyzetgyöke hasonlóan számolható kanonikus alakban, mint a 7. előadás 12-13. diáján.)

Az f polinom gyökei (a megoldóképlet segítségével):

$$z_{1,2} = \frac{-(-1 + 2i) \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2} = \frac{1 - 2i \pm (3 - 4i)}{2},$$

tehát $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = -1 + i$. A gyöktényezős felbontása f -nek:

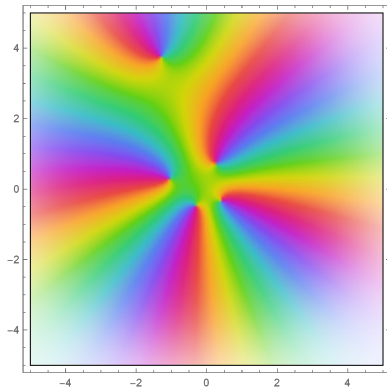
$$f = 1 \cdot (z - (2 - 3i))(z - (-1 + i)).$$

Míg valós számtest feletti polinomhoz tartozó polinomfüggvény grafikonját ábrázolni tudjuk a (közönséges) síkon, Descartes-féle koordinátarendszerben, addig a komplex számok feletti polinomok esetén ezt (még) nem tudjuk megtenni. Mivel a komplex számokat a komplex számsíkon ábrázoljuk, az $f \in \mathbb{C}[z]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvény ábrázolásánál a sík pontjaihoz kell a sík pontjait hozzárendelni. (Ez pedig már több, mint három dimenzió.) A polinomfüggvény szerencsére szemléltethető.

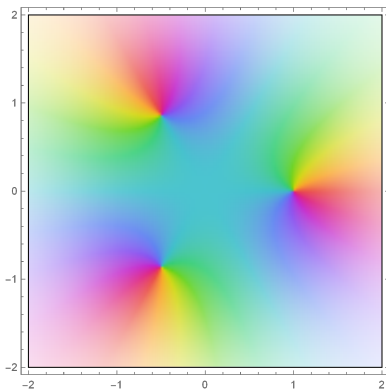
Komplex polinom

$$(p = iz^5 + (4 + 2i)z^4 + 3z^3 + z + i)$$

szemléltetése:

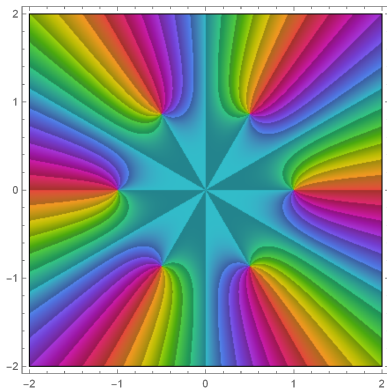
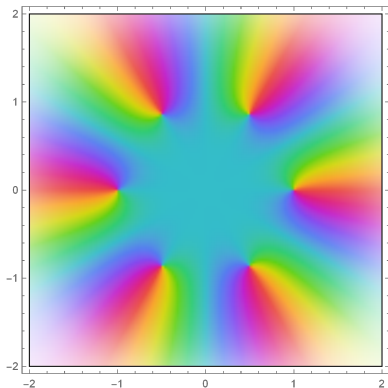


Szemléltessük a $p = z^3 - 1 \in \mathbb{C}[z]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvényt.

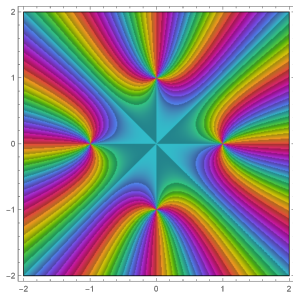
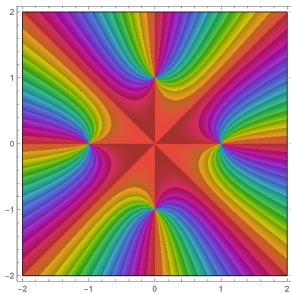
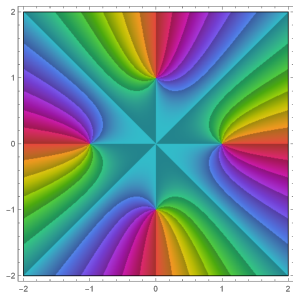
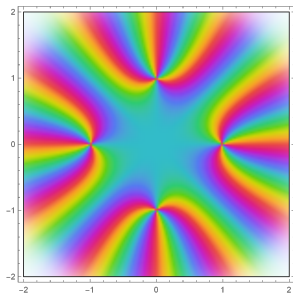
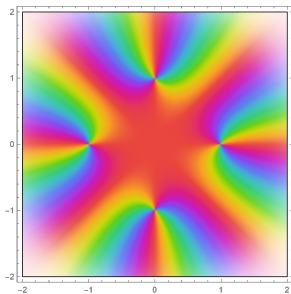
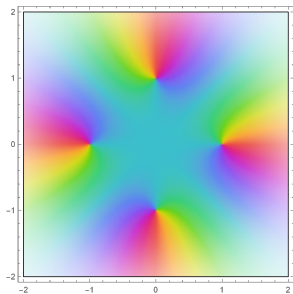


A p polinom gyökei (azaz a $z^3 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai), a $\sqrt[3]{1}$ értékei, tehát a harmadik komplex egységgyökök: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ábrázoljuk a színek segítségével az $f = z^6 - 1 \in \mathbb{C}[z]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvényt.



Ennek a polinomnak a gyökei (azaz a $z^6 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai), a $\sqrt[6]{1}$ értékei, tehát a 6-odik komplex egységgyökök: $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Polinomok, melyek gyökeit meg tudjuk határozni

- Tetszőlegesen adott $u \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén meg tudjuk adni az $\sqrt[n]{u}$ értékeit a gyökvonásra adott képlet segítségével, így az $f = z^n - u$ polinom gyökeit meg tudjuk határozni.
- Továbbá, ha a polinomunk másodfokú, vagy másodfokúra visszavezethető, akkor alkalmazhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

Példa.

- Megadjuk az $f = x^3 - i$ polinom gyöktényezős felbontását, felhasználva azt, hogy korábban meghatároztuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit:

$$f = (x - (-i)) \left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right) \left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right).$$

- Az $f = x^2 + x + 1$ polinomnak a valós számok felett nincs gyöktényezős felbontása, mert az $f(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa -3 , de komplex gyökei vannak: $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, így a gyöktényezős felbontása $\mathbb{C}$ felett:

$$f = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right).$$

Feladat.

Határozzuk meg az $f = 3x^5 + 3x^3 - 18x$ polinom gyöktényezős felbontását $\mathbb{C}$ felett.

Megoldás: Szorzattá alakítjuk a polinomot

$$\begin{aligned} f &= 3x^5 + 3x^3 - 18x \\ &= 3x(x^4 + x^2 - 6) = 3x(x^2 - 2)(x^2 + 3) \\ &= 3x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Tehát f gyökei: $0, \pm\sqrt{2}$ és $\pm\sqrt{3}i$.

Valós együtthatós polinomok komplex gyökei

Tétel.

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és c komplex szám gyöke az f valós együtthatós polinomnak, akkor $\bar{c}$ is gyöke a polinomnak.

Bizonyítás.

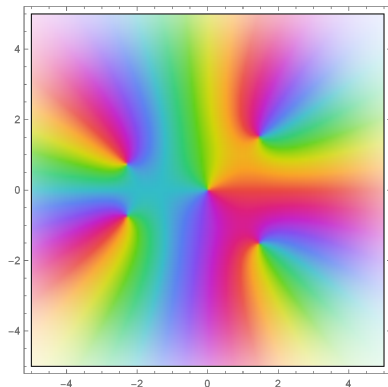
Az előző előadáson láttuk, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számok esetén $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$ és $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, valamint azt, hogy a valós együtthatók konjugáltja önmaga, azt kapjuk, hogy $f(\bar{c}) = \overline{f(c)} = \bar{0} = 0$, azaz, ha c gyöke a polinomnak, akkor $\bar{c}$ is gyöke f -nek.



Az alábbi képen látható az

$$\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{16}{3}z$$

komplex polinom színeképe, a polinom együtthatói valósak. Jól megfigyelhetők a konjugált gyökpárok.



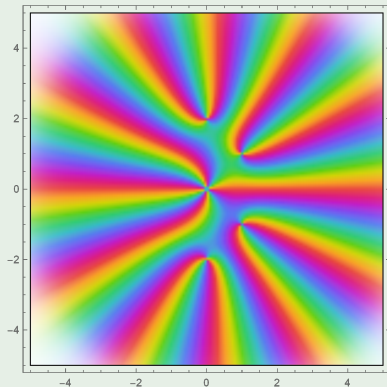
Következmény.

Ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom foka páratlan, akkor az előző tétel következtében f -nek van valós gyöke.

A dolgozatban NEM fognak szerepelni színeképekkel kapcsolatos feladatok, a színeképek csak a szemléltetést szolgálják, és a megértést segítik.

Feladat.

- Hogyan nézhet ki a z^3 színeképe? A 0-ból hány irányba „sugároznak” a színek?
- Mit jelenthet az, hogy a színeképen vannak olyan zérushelyek, ahonnan a színek több irányba „sugároznak”?
- Hányadfokú lehet a színeképhez tartozó polinom?
- Valós együtthatós ez a polinom?



Lagrange-féle interpolációs polinom

Tétel (Lagrange-féle interpoláció).

Legyen T számtest, $c_0, c_1, \dots, c_n$ páronként különböző T -beli elemek, valamint $d_0, d_1, \dots, d_n \in T$. Ekkor létezik egy és csakis egy **legfeljebb n -edfokú** $L \in T[x]$ polinom, amelyre

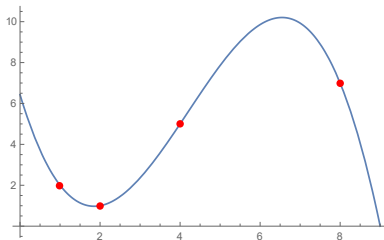
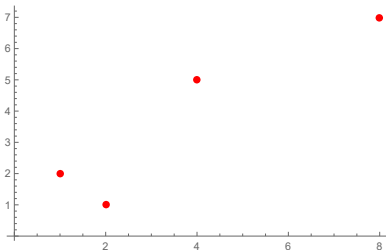
$$L(c_0) = d_0, L(c_1) = d_1, \dots, L(c_n) = d_n.$$

Ez az L polinom a következő:

$$L = \sum_{i=0}^n \frac{(x - c_0) \dots (x - c_{i-1})(x - c_{i+1}) \dots (x - c_n)}{(c_i - c_0) \dots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \dots (c_i - c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés.

Az L polinomot a $c_0, \dots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az L által meghatározott polinomfüggvény grafikonja átmegy a $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \dots, (c_n, d_n)$ pontokon.



A Lagrange-féle interpolációs tétel bizonyítása

Bizonyítás.

(Csak a létezést bizonyítjuk.) Legyen L_k ($0 \leq k \leq n$) az a $T[x]$ -beli polinom, amelyre $L_k(c_k) = 1$ és $L_k(c_j) = 0$ ($j \neq k$). Ilyen polinom megadható:

$$L_k = \frac{(x - c_0) \dots (x - c_{k-1})(x - c_{k+1}) \dots (x - c_n)}{(c_k - c_0) \dots (c_k - c_{k-1})(c_k - c_{k+1}) \dots (c_k - c_n)}.$$

Most már L is adódik:

$$L = d_0 \cdot L_0 + \dots + d_n \cdot L_n,$$

és látszik, hogy ez a polinom legfeljebb n -edfokú.



A Lagrange-féle interpolációs polinom meghatározása szerepel az elektronikus tesztekben, így az előadásban az „Elektronikus teszt” résznél található példa.

E-teszt: Komplex számok (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Ha $z = -2 + 5i$, akkor $|z| = \sqrt{29}$.
- $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$.
- $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

E-teszt.

- Ha $z = -2 + 5i$, akkor $|z| = \sqrt{29}$. Az állítás **igaz**, mert $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.
- $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$. Mivel a valós rész negatív, a képzetes pedig pozitív, így a komplex szám a 2. negyedben van a Gauss-síkon, de $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, így **hamis** az állítás. A 2. negyedben $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$.

E-teszt.

- $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex szám abszolút értéke 1, argumentuma $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, tehát
$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-5} = \cos \frac{-10\pi}{3} + i \sin \frac{-10\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ mivel } \frac{-10\pi}{3} = \frac{-12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}.$$
Tehát az állítás igaz.

Második megoldás: $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik komplex egységgyök, így $\varepsilon^3 = 1$. Tehát $\varepsilon^{-5} = \varepsilon^{-6}\varepsilon = (\varepsilon^3)^{-2}\varepsilon = \varepsilon$.

E-teszt.

A $(-1, 1)$, $(-2, 4)$, $(-3, -7)$ pontokra illeszkedő L Lagrange-polinom esetén $L(-5) = -71$.

A Lagrange-féle interpolációs polinom a következő tagokból áll:

$$L_0 = \frac{(x - (-2))(x - (-3))}{(-1 - (-2))(-1 - (-3))} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 5x + 6),$$

$$L_1 = \frac{(x - (-1))(x - (-3))}{(-2 - (-1))(-2 - (-3))} = (-1) \cdot (x^2 + 4x + 3),$$

$$L_2 = \frac{(x - (-1))(x - (-2))}{(-3 - (-1))(-3 - (-2))} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 3x + 2).$$

Tehát $L = 1 \cdot L_0 + 4 \cdot L_1 + (-7) \cdot L_2 = -7x^2 - 24x - 16$, így $L(-5) = -71$, tehát az állítás **igaz**.