

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

7. előadás

Komplex számok

„Bonyolult” számok

Régi bánatunk, hogy a negatív számokból nem tudunk négyzetgyököt vonni. Hasonló „bánatok” vezettek a számfogalom fejlődéséhez.

A természetes számok $\mathbb{N}$ esetén nem lehetett osztani $\rightarrow$ bevezették a pozitív racionális számokat. Nem lehetett kivonni $\rightarrow \mathbb{Q}$.

Nem lehetett mérni (pl. az egységnégyzet átlóját) $\rightarrow \mathbb{R}$.

Ez mindig a permanencia elv szerint történt, ez azt jelenti, hogy pl.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, és két racionális számra a műveleteket ugyanúgy kell végrehajtani $\mathbb{Q}$ -ban, mint $\mathbb{R}$ -ben.

Az, hogy nem lehet egy műveletet elvégezni, például az egyenletek megoldásakor okozhat nehézséget. Lehetséges, hogy a megoldás (mint érték) a szűkebb számkörben van, de a megoldási folyamat kivezet onnan. Például attól, hogy menet közben törtek lépnek fel, a végeredmény lehet természetes szám.

A Komplex számok

A valós számokat a számegyenes pontjaival szemléltetjük. A most bevezetendő komplex számokat, amelyek halmazát $\mathbb{C}$ fogja jelölni, pedig a sík pontjaival fogjuk szemléltetni. (Ez az ún. **komplex számsík** vagy **Gauss-féle számsík**.)

Definíció.

A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De a $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$. Tehát az $a + bi$ lényegében egy rendezett párt jelöl, amelynek első komponense a z komplex szám ún. **valós része**. Az i együtthatója a második komponens, amelyet a komplex szám **képzetes részének** nevezünk. Az i egyelőre csak egy szimbólum, a képzetes egység.

Jelölés.

A z komplex szám valós részét $\operatorname{Re}(z)$, képzetes részét $\operatorname{Im}(z)$ jelöli. Ha $z = a + bi$, akkor $\operatorname{Re}(z) = a$ és $\operatorname{Im}(z) = b$.

Definíció: kanonikus alak.

Az $a + bi$ jelölés a komplex szám **kanonikus alakja**. Mivel ez az (a, b) -t jelöli, a koordinátasíkon (amelyet mostantól a komplex számsíknak nevezünk) ez a komplex szám az (a, b) koordinátákkal megadott pontnak felel meg.

Tétel.

- Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek, azaz

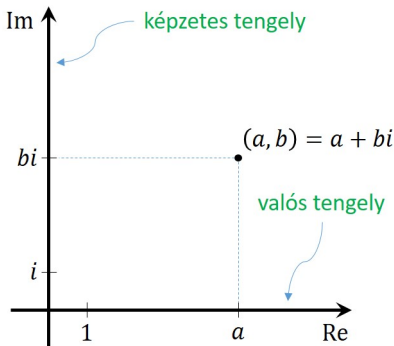
$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2 \text{ és } b_1 = b_2$$

$$(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}).$$

- A z komplex szám pontosan akkor valós, ha $\text{Im}(z) = 0$.

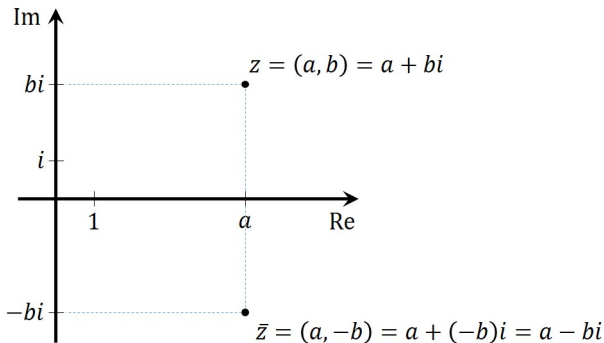
Definíció.

- A valós számok a **valós tengelyen** helyezkednek el.
- A z komplex szám **tisztán képzetes**, ha $\operatorname{Re}(z) = 0$. A tisztán képzetes komplex számok a **képzetes tengelyen** helyezkednek el.
- Az i komplex szám a **képzetes egység** vagy **imaginárius egység**.



Definíció: (komplex) konjugált.

A $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\bar{z} = \overline{a + bi} = a + (-b)i = a - bi$ komplex számot értjük, tehát a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés.



Számolás kanonikus alakban (1.)

Megjegyzés.

A kifejezésekkel való szokásos számolási szabályok (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) mellett még az $i^2 = -1$ szabályt fogjuk alkalmazni.

Összeadás:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

Szorzás:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.\end{aligned}$$

Számolás kanonikus alakban (2.)

Mivel az i a -1 négyzetgyöke, az osztásnál a gyöktelenítésnél is használt lépést hajtjuk végre.

Megjegyzés.

Reciprok: Legyen $z = a + bi \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i.\end{aligned}$$

Példa.

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{2 - 12i^2 - 8i + 3i}{1^2 + 4^2} = \frac{14 - 5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$$

Megjegyzés.

Azokat a számhalmazokat, ahol elvégezhető a négy alpművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), és érvényesek rá a szokásos tulajdonságok (összeadás, szorzás: asszociatív, kommutatív, szorzás disztributív az összeadásra vonatkozóan) **számtesteknek** nevezzük. Számtest például $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$, valamint $\mathbb{C}$ is számtest. (Az egész számok halmaza nem számtest, mert az osztás kivezet a halmazból.)

Definíció.

A $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) komplex szám **abszolút értékén** a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

nemnegatív valós számot értjük. Ez a komplex számsíkon z origótól való távolsága.

Tétel.

Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Ekkor

$$(1) \quad \overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v},$$

$$(2) \quad \overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v},$$

$$(3) \quad \bar{\bar{u}} = u,$$

$$(4) \quad \bar{u} = u \iff u \in \mathbb{R},$$

$$(5) \quad u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re}(u),$$

$$(6) \quad |\bar{u}| = |u|,$$

$$(7) \quad |u| = \sqrt{u\bar{u}},$$

$$(8) \quad |uv| = |u| \cdot |v|,$$

$$(9) \quad 1/z = \bar{z}/|z|^2,$$

$$(10) \quad |u + v| \leq |u| + |v|.$$

Tétel.

Tetszőlegesen adott $u = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) komplex szám esetén a $z^2 = u$ egyenlet mindig megoldható a komplex számok körében.

Bizonyítás.

A z komplex számot kanonikus alakban keressük, legyen $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ekkor

$$\begin{aligned}(x + yi)^2 = a + bi &\iff (x^2 - y^2) + (2xy)i = a + bi \\ &\iff x^2 - y^2 = a \text{ \& } 2xy = b.\end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \in \mathbb{R} \text{ és } y = \frac{b}{2x} \in \mathbb{R}.$$



Példa.

Megadjuk a $z^2 = -9 + 12i$ egyenlet megoldását kanonikus alakban. Legyen $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Az előbbiek szerint

$$x^2 - y^2 = -9 \text{ \& } 2xy = 12.$$

Mivel $x, y \neq 0$, ezért $y = \frac{6}{x}$. Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe: $x^2 - \frac{36}{x^2} = -9$, majd x^2 -tel beszorozva és átrendezve: $(x^2)^2 + 9x^2 - 36 = 0$. Ekkor

$$x^2 = \frac{-9 + \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2} = \frac{-9 + 15}{2} = 3.$$

Így $x = \pm\sqrt{3}$ és $y = \pm\frac{6}{\sqrt{3}} = \pm\frac{6\sqrt{3}}{3} = \pm2\sqrt{3}$. Az egyenlet megoldásai: $z_1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$ és $z_2 = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$.

Példa.

Ha $z^2 = -5$, akkor $z = \sqrt{-5}$, így $z = \pm\sqrt{5}i$.

Példa.

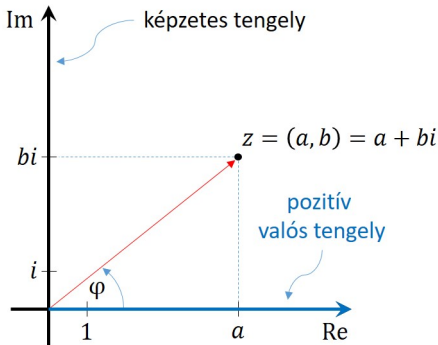
Adjuk meg a $\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3}$ törtet kanonikus alakban.

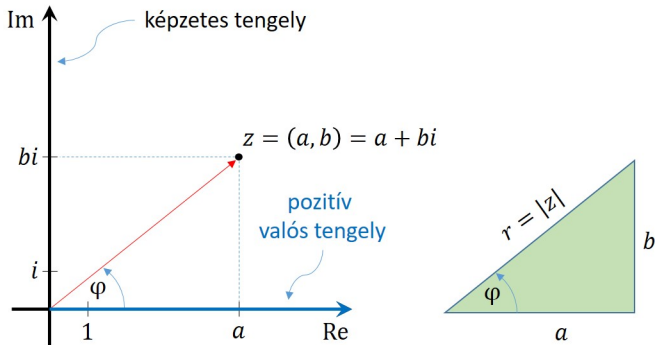
$$\begin{aligned}\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3} &= \frac{4-4i-1}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{3-4i}{1+3i-3-i} \\ &= \frac{3-4i}{-2+2i} = \frac{(3-4i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} \\ &= \frac{-6-6i+8i-8}{2^2+2^2} = \frac{-14+2i}{8} \\ &= -\frac{7}{4} + \frac{1}{4}i.\end{aligned}$$

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció: argumentum.

A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével a helyvektora bezár. Az ábrán φ . (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.)





Az ábráról leolvasható, hogy $z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i$.

Definíció: trigonometrikus alak.

Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és az abszolút értéke $r(=|z|)$, akkor $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a komplex szám **trigonometrikus alakja**.

Megjegyzés.

A 0 komplex számnak nincs trigonometrikus alakja.

Megjegyzés.

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, melynek trigonometrikus alakja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ akkor

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right),$$

azaz $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ és $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Példa.

- Legyen $z = 1 + i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

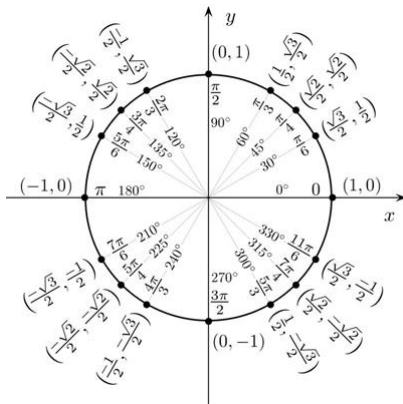
$$\text{Tehát } z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

- Legyen $z = 1 + \sqrt{3}i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, és

$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 (\cos \varphi + i \sin \varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Tehát } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei



Komplex szám exponenciális alakja

Definíció: komplex szám exponenciális alakja.

Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és abszolút értéke r , akkor $z = re^{\varphi i}$ a z komplex szám **exponenciális alakja**.

Példa.

Az előző példában meghatároztuk a $1 + i$ és a $1 + \sqrt{3}i$ komplex számok trigonometrikus alakját (tehát ismerjük az abszolút értékeiket és az argumentumaikat), így az exponenciális alak könnyen felírható:

- $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i},$
- $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{\frac{\pi}{3} i}.$

Megjegyzés.

Mivel a trigonometrikus és az exponenciális alakot is a komplex szám argumentuma és abszolút értéke határozza meg, így azok az állítások, amelyeket az egyik alakra megfogalmazunk, a másokra is érvényesek.

Tétel.

Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ nemnulla komplex számok ($r, s > 0$ valós számok, és $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$), akkor

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) &= re^{-i\varphi}, \\ z \cdot w &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) &= rse^{i(\varphi + \psi)}, \\ \frac{1}{w} &= \frac{1}{s}(\cos(-\psi) + i \sin(-\psi)) &= \frac{1}{r}e^{-i\psi}, \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)), &= \frac{r}{s}e^{i(\varphi - \psi)}.\end{aligned}$$

Bizonyítás.

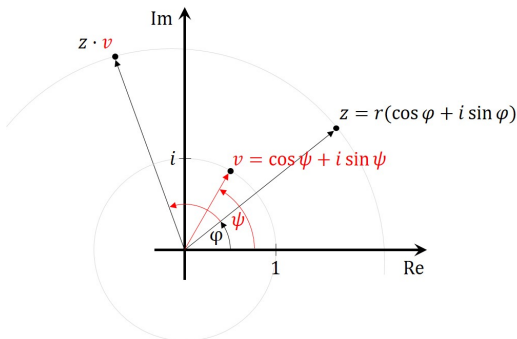
(Csak a trig. alakbeli szorzásra vonatkozó formulát bizonyítjuk.) Az addíciós tételeket lehet felhasználni:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= (rs)((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \cdot i) \\ &= (rs)(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$



Megjegyzés (A trigonometrikus alak és a geometria).

A szorzat trigonometrikus alakjára vonatkozó képletből adódik, hogy rögzített $v = \cos \psi + i \sin \psi$ egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.



Példa.

Kiszámítjuk ugyanazt a törtet trigonometrikus és kanonikus alakban is. Felhasználjuk, hogy a számláló és a nevező trigonometrikus alakját egy korábbi példában megadtuk.

$$\begin{aligned}\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} &= \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3} - i + \sqrt{3}i}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$$

A két alakot összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

E-teszt: Komplex számok (1. feladat)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e, ha

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i.$$

(1 pont jár, ha mindhárom válasz helyes, egyébként 0.)

- $(z_1 - z_2) \cdot \overline{z_3} = 1 + 54i.$
- $\frac{\operatorname{Im}(z_1) + z_2}{z_3} = \frac{8}{17} - \frac{19}{17}i.$
- $\frac{z_2}{\overline{z_3}} \neq \frac{24}{17} + \frac{6}{17}i.$

E-teszt.

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i.$$

- $(z_1 - z_2) \cdot \overline{z_3} = 1 + 54i$:

$$\begin{aligned}(z_1 - z_2) \cdot \overline{z_3} &= (5 - 4i - (-3 + i)) \cdot \overline{(-3 - 5i)} \\&= (8 - 5i) \cdot (-3 + 5i) \\&= -24 + 40i + 15i - 25i^2 \\&= -24 + 25 + 55i \\&= 1 + 55i \\&\neq 1 + 54i,\end{aligned}$$

így az állítás **hamis**.

E-teszt.

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i$$

- $\frac{\operatorname{Im}(z_1) + z_2}{z_3} = \frac{8}{17} - \frac{19}{17}i$:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Im}(z_1) + z_2}{z_3} &= \frac{-4 + (-3 + i)}{-3 - 5i} = \frac{-7 + i}{-3 - 5i} \cdot \frac{-3 + 5i}{-3 + 5i} \\&= \frac{21 - 38i + 5i^2}{9 + 25} \\&= \frac{16 - 38i}{34} \\&= \frac{8}{17} - \frac{19}{17}i,\end{aligned}$$

így az állítás **igaz**.

E-teszt.

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i$$

- $\frac{z_2}{z_3} \neq \frac{24}{17} + \frac{6}{17}i$:

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_3} &= \frac{-3 + i}{-3 + 5i} = \frac{-3 + i}{-3 + 5i} \cdot \frac{-3 - 5i}{-3 - 5i} \\&= \frac{9 + 12i - 5i^2}{9 + 25} = \frac{14 + 12i}{34} \\&= \frac{7}{17} + \frac{6}{17}i \neq \frac{24}{17} + \frac{6}{17}i,\end{aligned}$$

így az állítás **igaz**.