

# Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

6. előadás

# Leképezések

---

## Definíció.

Tetszőleges  $A, B$  halmazokra az  $A \times B$  halmaz részhalmazait  $A$ -ból  $B$ -be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az  $A$  halmaz a megfeleltetés **indulási halmaza**,  $B$  pedig az **érkezési halmaza**.

## Példa.

Az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazból a  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  halmazba menő megfeleltetések pontosan a  $P(A \times B)$  halmaz elemei, azaz  $2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$  darab van belőlük. Például, az  $\emptyset$  is megfeleltetés  $A$ -ból  $B$ -be.

## Definíció.

A  $\varrho \subseteq A \times B$  megfeleltetést  $A$ -ból  $B$ -be menő **parciális leképezésnek** nevezünk, ha bármely  $a \in A$ -ra **legfeljebb egy**  $b \in B$  létezik, amelyre  $(a, b) \in \varrho$ .

## Példa.

Legyen  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , ekkor a  $\varrho = \{(1, 4), (3, 4)\} \subseteq A \times B$  megfeleltetés parciális leképezés. Mivel minden  $A$ -beli elem esetén 5 lehetőség közül választhatunk (nem rendelünk hozzá semmit, vagy  $B$  valamelyik elemét rendeljük hozzá), így  $A$ -ból  $B$ -be menő parciális leképezésből  $5^3 = 125$  darab van. Az  $\emptyset$  is parciális leképezés  $A$ -ból  $B$ -be.

## Definíció.

A  $\varphi \subseteq A \times B$  megfeleltetést  $A$ -ból  $B$ -be menő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely  $a \in A$ -ra **pontosan egy**  $b \in B$  létezik, amelyre  $(a, b) \in \varphi$ .

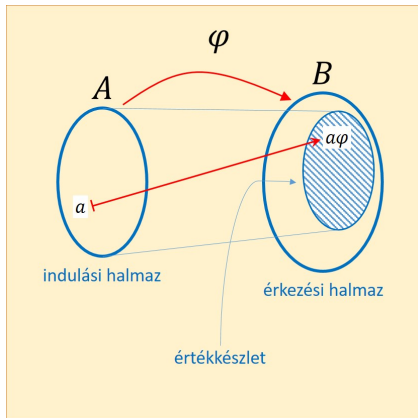
Leképezések esetén a  $\varphi \subseteq A \times B$  helyett a  $\varphi: A \rightarrow B$  jelölés használjuk. Továbbá  $(a, b) \in \varphi$  helyett azt mondjuk, hogy az  $a$  elem  $\varphi$  melletti képe  $b$ , és azt írjuk, hogy  $a\varphi = b$  vagy  $a \mapsto b$ . Ekkor azt is mondhatjuk, hogy a  $b$  elem őse az  $a$ .

## Példa.

Legyen  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , ekkor a  $\varphi = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \subseteq A \times B$  megfeleltetés leképezés (és parciális leképezés is), általában helyette a  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $1\varphi = 4$ ,  $2\varphi = 3$ ,  $3\varphi = 4$  jelölést használjuk. Mivel minden  $A$ -beli elem esetén 4 lehetőség közül választhatunk, így  $A$ -ból  $B$ -be menő leképezésből  $4^3 = 64$  darab van. Az  $\emptyset$  NEM leképezés  $A$ -ból  $B$ -be.

## Definíció.

A  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés esetén az  $A$  indulási halmazt **értelmezési tartománynak** nevezzük. Az  $\{a\varphi : a \in A\} \subseteq B$  halmaz neve **értékkészlet**.

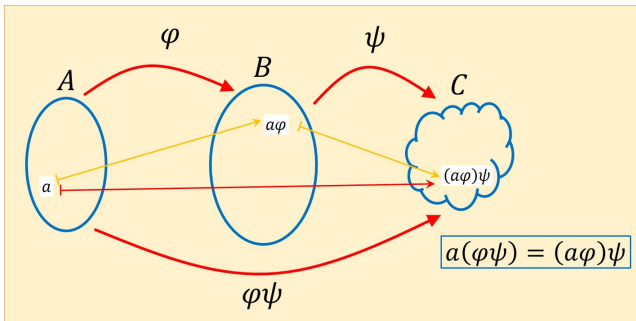


## Tétel.

Ha  $\varphi: A \rightarrow B$  és  $\psi: B \rightarrow C$  leképezések, akkor

$\varphi\psi = \{(a, c) : (\exists b \in B)((a, b) \in \varphi \wedge (b, c) \in \psi)\}$  megfeleltetés leképezés, a  $\varphi$  és  $\psi$  leképezések szorzata. Leképezésként írva:

$\varphi\psi: A \rightarrow C, a \mapsto (a\varphi)\psi.$



## Megjegyzés.

Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Például abban az esetben, amikor  $\varphi$  is és  $\psi$  is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli, a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

## Feladat.

Legyenek  $\varphi, \psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  leképezések, ahol  $x\varphi = 2x$  és  $x\psi = x^2 + 1$ . Adjuk meg a  $\varphi\psi$  leképezést.

Megoldás: ld. előadáson.

## Definíció.

A  $\varphi: A \rightarrow B$  és  $\psi: C \rightarrow D$  leképezések egyenlők, ha  $A = C$  (indulási halmazaik megegyeznek),  $B = D$  (érkezési halmazai megegyeznek) és  $a\varphi = a\psi$  ( $\forall a \in A$ ).

## Tétel.

A leképezések szorzása asszociatív, azaz tetszőleges  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $\psi: B \rightarrow C$  és  $\tau: C \rightarrow D$  leképezésekre

$$(\varphi\psi)\tau = \varphi(\psi\tau)$$

teljesül. (Mindkét oldalon  $A \rightarrow D$  leképezés áll.)

## Példa.

Tekintsük az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazt, és a

$$\varphi: A \rightarrow A, 1\varphi = 2, 2\varphi = 3, 3\varphi = 1,$$

valamint a

$$\sigma: A \rightarrow A, 1\sigma = 2, 2\sigma = 1, 3\sigma = 3$$

leképezéseket. Ekkor

- $\varphi\sigma: A \rightarrow A, 1\varphi\sigma = 1, 2\varphi\sigma = 3, 3\varphi\sigma = 2,$
- $\sigma\varphi: A \rightarrow A, 1\sigma\varphi = 3, 2\sigma\varphi = 2, 3\sigma\varphi = 1,$

azaz  $1\varphi\sigma \neq 1\sigma\varphi$ . Így  $\varphi\sigma \neq \sigma\varphi$ .

## Megjegyzés.

**A leképezések szorzása nem kommutatív.**

## Definíció.

A  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **injektív**, ha  $A$  különböző elemeinek képe különböző, azaz

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \rightarrow a_1\varphi \neq a_2\varphi).$$

## Megjegyzés.

Az injektivitás más szóval azt jelenti, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varphi = a_2\varphi \rightarrow a_1 = a_2).$$

Nyíldiagramon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy  $A$  minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ettől leképezés), és  $B$  minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik.

## Feladat.

Adjunk meg injektív leképezést az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazból a  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  halmazba.

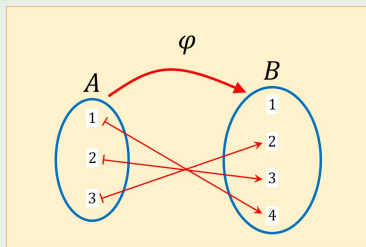
Megoldás: például ld. következő dia.

## Példa.

- Legyen  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , ekkor a

$$\varphi: A \rightarrow B, \quad 1\varphi = 4, \quad 2\varphi = 3, \quad 3\varphi = 2$$

leképezés injektív.



- Az  $A$ -ból  $B$ -be menő injektív leképezésből  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  darab van, mivel különböző elemekhez különböző képet kell rendelni.

## Definíció.

A  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **szürjektív**, ha  $B$  minden eleme előfordul képelemként, azaz

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varphi = b).$$

Más szóval, ha  $\varphi$  értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

## Megjegyzés.

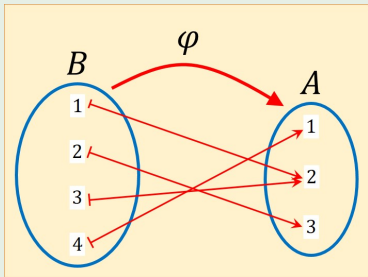
Nyíldiagramon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy  $A$  minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ettől leképezés), és  $B$  minden elemébe megy nyíl.

## Példa.

Ha  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , akkor  $A$ -ból  $B$ -be nem adható meg szürjektív leképezés, de  $B$ -ből  $A$ -ba igen. Például a

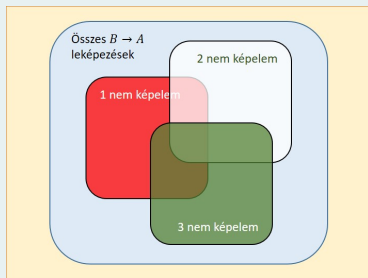
$$\varphi: B \rightarrow A, \quad 1\varphi = 2, \quad 2\varphi = 3, \quad 3\varphi = 2, \quad 4\varphi = 1$$

leképezés szürjektív.



## Megjegyzés.

Hány  $B$ -ből  $A$ -ba menő szürjektív leképezés van? Vonjuk ki a  $B$ -ből  $A$ -ba menő összes leképezés számából ( $3^4$ ) azoknak a leképezéseknek a számát, amikor legalább az egyik elem nem áll elő képként ( $2^4$ ), mindhárom kimaradó elem esetén. Így viszont azt az esetet, amikor 1-elemű az értékkészlet a szükségesnél többször levontuk, ezért hozzá kell ismét adni. Tehát a  $B$ -ből  $A$ -ba menő szürjektív leképezésből:  $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36$  darab van.



## Definíció.

A  $\varphi$  leképezés **bijektív**, ha szürjektív és injektív is.

## Megjegyzés.

Nyíldiagramon a bijektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy  $A$  minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ettől leképezés), és  $B$  minden elemébe pontosan egy nyíl érkezik.

## Példa.

Ha  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , akkor  $A$ -ból  $B$ -be nem adható meg bijektív leképezés, és  $B$ -ből  $A$ -ba sem.

## Feladat.

Adjunk meg bijektív leképezést az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazból az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazba. Határozzuk meg, hogy hány  $A$ -ból  $A$ -ba menő bijektív leképezés van.

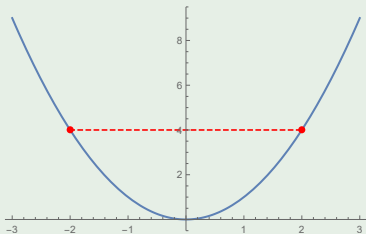
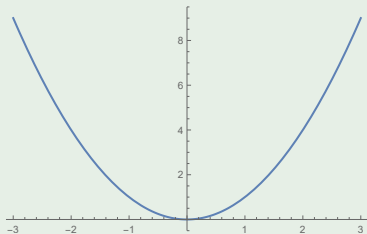
Megoldás: például  $\varphi: A \rightarrow A$ ,  $1\varphi = 2$ ,  $2\varphi = 3$ ,  $3\varphi = 1$ .

Az  $A$ -ból  $A$ -ba menő minden injektív leképezés már szürjektív is lesz, tehát az  $A$ -ból  $A$ -ba menő bijektív leképezések száma  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ .

## Példa.

A  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  leképezés

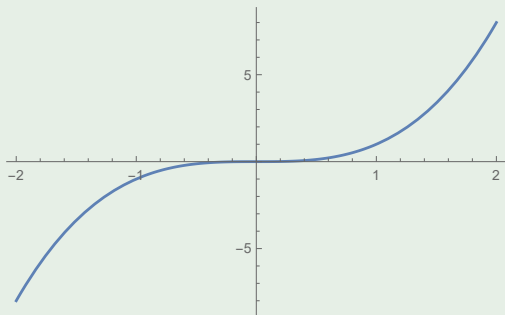
- **nem injektív**, mert pl. a  $-2$  és az  $2$  helyen azonos értéket vesz fel,
- **nem szürjektív**, mert negatív valós számokat nem vesz fel értéként,
- **nem bijektív**.



## Példa.

A  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  leképezés

- **injektív**, mivel a függvény szigorúan monoton, minden értéket csak egyszer vesz fel,
- **szürjektív**, mivel minden valós értéket felvesz így, tetszőleges  $y \in \mathbb{R}$  elem őse  $x = \sqrt[3]{y}$ , mert  $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ ,
- **bijektív**.



## Megjegyzés.

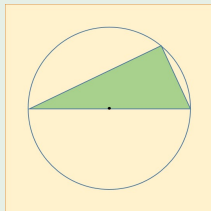
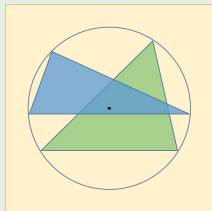
Az előző két példában olyan leképezések szerepeltek, amelyek ábrázolhatók voltak koordinátarendszerben függvényként. A függvények számhalmazok között megadott leképezések, de nem minden leképezés indulási és érkezési halmaza áll számokból.

## Példa.

Jelölje  $\mathbb{H}$  a sík háromszögeinek halmazát,  $\mathbb{S}$  pedig a sík pontjainak halmazát. Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{S}, \quad h \mapsto h \text{ körülírt körének középpontja.}$$

- A  $\varphi$  leképezés **nem injektív**.
- A  $\varphi$  leképezés **szürjektív**.
- Mivel a  $\varphi$  leképezés nem injektív, így **nem bijektív**.



## Feladat.

Döntsük el, hogy injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a  $\varphi$  leképezés:

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x\varphi = 2x + 1.$$

Megoldás: ld. előadáson.

# A leképezésszorzás tulajdonságai

## Tétel.

Tetszőleges  $\varrho: A \rightarrow B$  és  $\sigma: B \rightarrow C$  leképezésekre

- (a) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  szürjektív, akkor  $\varrho\sigma$  is szürjektív,
- (b) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  injektív, akkor  $\varrho\sigma$  is injektív,
- (c) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  bijektív, akkor  $\varrho\sigma$  is bijektív,
- (d) ha  $\varrho\sigma$  szürjektív, akkor  $\sigma$  szürjektív,
- (e) ha  $\varrho\sigma$  injektív, akkor  $\varrho$  injektív,
- (f) ha  $\varrho\sigma$  bijektív, akkor  $\varrho$  injektív és  $\sigma$  szürjektív.

# Az identikus leképezések, leképezések inverze

## Definíció: identikus leképezés.

Tetszőleges  $A$  halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a.$$

## Tétel.

Tetszőleges  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezésre  $\text{id}_A \varphi = \varphi$  és  $\varphi \text{id}_B = \varphi$ .

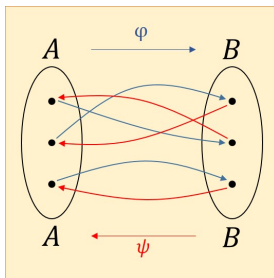
## Definíció: leképezés inverze.

Legyenek  $\varphi: A \rightarrow B$  és  $\psi: B \rightarrow A$  leképezések. Azt mondjuk, hogy  $\psi$  **inverze**  $\varphi$ -nek, ha  $\varphi\psi = \text{id}_A$  és  $\psi\varphi = \text{id}_B$ . Világos, hogy ez szimmetrikus viszony:  $\psi$  akkor és csak akkor inverze  $\varphi$ -nek, ha  $\varphi$  inverze  $\psi$ -nek.

# Tétel.

Legyen  $\varphi: A \rightarrow B$  tetszőleges leképezés.

- 1 Akkor és csakis akkor létezik  $\varphi$ -nek inverze, ha  $\varphi$  bijektív.
- 2 Ha  $\varphi$  bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a  $\psi: B \rightarrow A$  leképezés, amely tetszőleges  $b \in B$  elemhez azt az egyértelműen meghatározott  $a$  elemet rendeli, amelyre  $a\varphi = b$ . (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti őst rendeli. Azaz tetszőleges  $a \in A$  és  $b \in B$  esetén  $b\psi = a$  akkor és csak akkor, ha  $a\varphi = b$ .)



## Megjegyzés.

Ha a  $\varphi$  leképezés bijektív, akkor van, mégpedig pontosan egy inverze, ezt az egyértelműen meghatározott inverzet fogjuk  $\varphi^{-1}$ -zel jelölni.

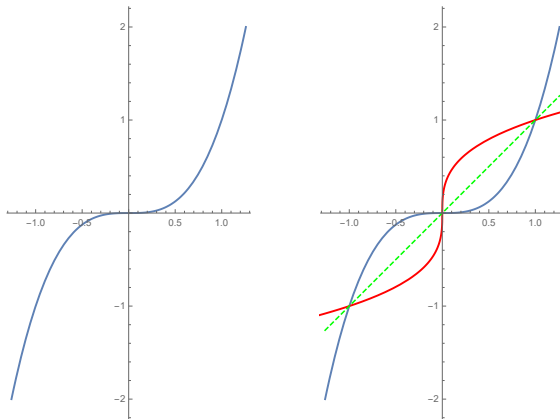
## Tétel.

Tetszőleges  $\varphi: A \rightarrow B$  és  $\psi: B \rightarrow C$  bijektív leképezésre

- (a)  $\varphi^{-1}$  bijektív, valamint  $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$ ,
- (b)  $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$ .

## Példa.

A  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  leképezésről korábban láttuk, hogy bijektív. A leképezés inverze:  $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ .



## Megjegyzés.

A Relációk témakörénél definiáltuk a következőket. Legyen  $A$  tetszőleges halmaz, jelölje  $\text{Part}(A)$  az  $A$  halmaz osztályozásainak (más szóval partícióinak) halmazát,  $\text{Eq}(A)$  pedig az ekvivalenciarelációk halmazát az  $A$  halmazon. Új fogalmaink segítségével a partíciók és az ekvivalenciák közötti kapcsolat az alábbi formát ölti.  $A$

- $\varphi: \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$ ,  $\varrho \mapsto A/\varrho = \{a/\varrho : a \in A\}$  és
- $\psi: \text{Part}(A) \rightarrow \text{Eq}(A)$ ,  $\mathcal{C} \mapsto \varrho_{\mathcal{C}}$

leképezések bijektívek, amelyek egymás inverzei.

# Halmazok elemszáma, számossága

---

## Példa.

A Császári és Királyi 12. Nádor Huszárezred elvonul a Fasori Evangélikus Gimnázium előtt. Meg tudja-e az ablakon kilógatott Jancsi kapásból mondani, hogy miből van több, lóból vagy huszárból?

## Megjegyzés.

Kézenfekvő körülményeket feltételezve (ló lovon, ló huszáron, huszár huszáron nem ül stb.) **igen**, hiszen minden lovon pontosan egy huszár ül és minden huszár lovon ül, tehát az ezredben ugyanannyi ló van, mint huszár. (Ez a szám általában nem 1000.)

Másképp fogalmazva: Legyen  $L$  a lovak,  $H$  a huszárok halmaza, és tekintsük a  $\varphi = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$  megfeleltetést. Ez a megfeleltetés leképezés (mert minden lovon pontosan egy huszár ül), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne, vö.: Egy fenékkal nem lehet két lovat megülni.) és szürjektív (mert minden huszárnak van lova), tehát  $\varphi$  bijektív leképezés. A fenti  $\varphi: L \rightarrow H$  bijektív leképezés létezése annak az oka, hogy  $|L| = |H|$ , azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

## Megjegyzés.

A véges halmazok elemeit megszámlálhatjuk. Pl. a balkezünk ujjainak halmaza esetén azt mondjuk, hogy ennek a halmaznak az elemszáma 5. Minden véges halmaznak van egy és csakis egy jól meghatározott **elemszáma**. Egy halmaz véges, ha elemeit – az  $\mathbb{N}_0$  elemeinek felhasználásával – meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor végtelennek mondjuk.

## Megjegyzés.

A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám” elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni. Tehát a számosság az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.

Először (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”. Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „számossága egyenlő”.

# Az öt fogalma

Legyen az a halmaz, aminek az elemszámát keressük, a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek”). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt”, hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű” halmaz.

Ezt követően az „öt” nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt” fogalmát absztrakcióval definiáltuk – az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)

Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mamutok halmaza között az őseember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt”, és elégedett vala; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az, hogy „öt”. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is.

# Azonos számosságúnak lenni

## Definíció.

Legyen  $A$  és  $B$  halmaz. Azt mondjuk, hogy az  $A$  és  $B$  halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik  $A \rightarrow B$  bijektív leképezés. (Jelölése:  $|A| = |B|$ .)

## Definíció.

A természetes számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és  $\aleph_0$ -al jelöljük. (Kiejtve „alef null”;  $\aleph$  a héber ábécé első betűje.)

## Tétel.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$  a legkisebb végtelen számosság.

# Vajon korrekt a számosság definíciója?

## Megjegyzés.

Az összes halmazból álló összesség **nem halmaz**, mert túl sok eleme van. Ezen úgy segítünk, hogy az ilyen túl nagy összességeket elnevezzük osztályoknak. A reláció fogalma nemcsak halmazon, hanem – minden változtatás nélkül – osztályon is értelmes.

## Tétel.

Az összes halmazok  $\mathcal{H}$ -val jelölt osztályán az „egyenlő számosságúnak lenni” reláció, azaz az „ $\{(A, B) \in \mathcal{H}^2 : |A| = |B|\}$ ” reláció „ekvivalenciareláció”.

# Hatványhalmaz számossága

## Megjegyzés.

Vajon  $\aleph_0$  az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is? Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy  $P(A)$  az  $A$  halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

## Tétel.

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága nem egyenlő a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely  $A$  halmazra  $|A| \neq |P(A)|$ .

Tehát nem  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$  az egyetlen végtelen számosság, hiszen  $P(\mathbb{N})$  eltérő számosságú, és nyilván  $P(\mathbb{N})$  is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak).

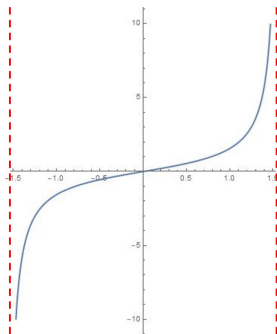
# Végtelenek végtelenjei

## Tétel.

A valós számok számossága egyenlő az  $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  halmaz számosságával.

## Bizonyítás.

A  $\operatorname{tg}: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \operatorname{tg}(x)$  leképezés bijektív.



## Tétel.

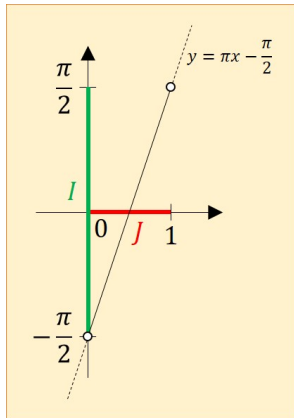
Az  $I = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  intervallum számossága megegyezik a  $J = (0; 1)$  intervallum számosságával.

## Bizonyítás.

A  $J \rightarrow I, x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}$  leképezés bijektív.  $\diamond$

## Következmény.

$|\mathbb{R}| = |(0; 1)|$ , azaz pontosan annyi valós szám van, mint amennyi valós szám van a  $(0; 1)$  intervallumban.



## Állítás.

Legyenek  $a$  és  $b$  valós számok úgy, hogy  $a < b$ . Ekkor

$$|(a; b)| = |(0; 1)|,$$

ahol  $(a; b) = \{r \in \mathbb{R} : a < r < b\}$ .

## Bizonyítás.

Bijektív leképezést adunk meg a  $(0; 1)$  és  $(a; b)$  intervallum között:

$$(0; 1) \rightarrow (a; b), \quad x \mapsto (b - a)x + a.$$

# A Cantor-féle átlós módszer

## Tétel (Cantor).

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|.$$

## Megjegyzés.

Mivel  $|\mathbb{R}| = |(0; 1)|$ , ezért elegendő azt igazolni, hogy

$$|\mathbb{N}| \neq |J|,$$

ahol  $J = (0; 1)$ .

A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

## Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy  $|\mathbb{N}| = |J|$ , ahol  $J = (0; 1)$ . Ekkor létezik  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow J$  bijekció. Legyen  $n\varphi = r_n \in J$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$r_1: 0,2078795 \dots$

$r_2: 0,6931471 \dots$

$r_3: 0,7041067 \dots$

$r_4: 0,7853981 \dots$

$r_5: 0,3678794 \dots$

$r_6: 0,6449340 \dots$

$r_7: 0,6180339 \dots$

$\vdots$

## Bizonyítás. (folyt.)

$$\begin{aligned}r_1 &: 0,2078795 \dots \\r_2 &: 0,6931471 \dots \\r_3 &: 0,7041067 \dots \\r_4 &: 0,7853981 \dots \\r_5 &: 0,3678794 \dots \\r_6 &: 0,6449340 \dots \\r_7 &: 0,6180339 \dots \\&\vdots\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}r_1 &: 0,2078795 \dots \\r_2 &: 0,6931471 \dots \\r_3 &: 0,7041067 \dots \\r_4 &: 0,7853981 \dots \\r_5 &: 0,3678794 \dots \\r_6 &: 0,6449340 \dots \\r_7 &: 0,6180339 \dots \\&\vdots \\b &: 0,4454454 \dots\end{aligned}$$

Definiáljuk a  $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in J$  valós számot az alábbi módon: ha az  $r_n = n\varphi$  valós számban az  $n$ -edik tizedesjegy 4, akkor legyen  $b_n = 5$ , ellenkező esetben pedig legyen  $b_n = 4$ . Ha  $b$  őse  $n$ , akkor  $b = n\varphi = r_n$  teljesülne, ami nem lehetséges, mivel  $b$  és  $r_n$   $n$ -edik tizedesjegye különböző. Ellentmondásra jutottunk.



## Definíció.

Legyenek  $A$  és  $B$  halmazok. Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a  $B$  halmaz számossága, (jel.:  $|A| \leq |B|$ ), ha létezik injektív  $A \rightarrow B$  leképezés.

Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz **számossága kisebb**, mint a  $B$  halmaz számossága (jel.:  $|A| < |B|$ ), ha  $|A| \neq |B|$  (azaz nem létezik  $A \rightarrow B$  bijekció) és  $|A| \leq |B|$  (de létezik  $A \rightarrow B$  injekció).

## Példa.

- $|\{1, 2, 3\}| < |\{1, 2, 3, 4\}|$ , hiszen a

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3$$

leképezés injektív, bijekció a két halmaz között pedig nincs.

- Tetszőleges  $A$  halmazra  $|A| < |P(A)|$ , mert már láttuk, hogy  $|A| \neq |P(A)|$ , az  $A \rightarrow P(A)$ ,  $a \mapsto \{a\}$  leképezés pedig injektív.
- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ , hiszen már láttuk, hogy  $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ , továbbá az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto n$  leképezés injektív.

## Definíció.

Az  $A$  halmaz **véges**, ha létezik olyan  $n$  nemnegatív egész, hogy  $|A| = n$ . Az  $A$  halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha  $|A| = |\mathbb{N}|$ , ekkor azt írjuk, hogy  $|A| = \aleph_0$ . Az  $A$  halmaz **megszámlálható**, ha  $A$  véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az  $A$  halmaz **kontinuum számosságú**, ha  $|A| = |\mathbb{R}|$ , ekkor azt írjuk, hogy  $|A| = \mathfrak{c}$ .

## Tétel.

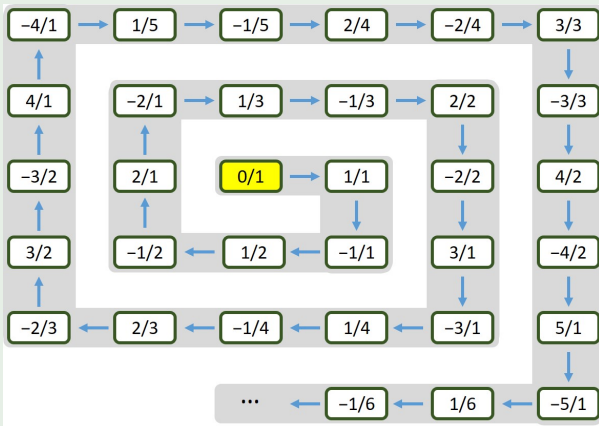
Tetszőleges  $A$  halmaz esetén akkor és csak akkor teljesül, hogy  $|A| = \aleph_0$ , ha  $A$  végtelen és sorozatba rendezhető, azaz megadható olyan, az  $\mathbb{N}$  elemeivel indexelt  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  sorozat, amely  $A$  minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).

## Példa.

Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz  $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ , mivel végtelen és a  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$  sorozat minden elemét tartalmazza.

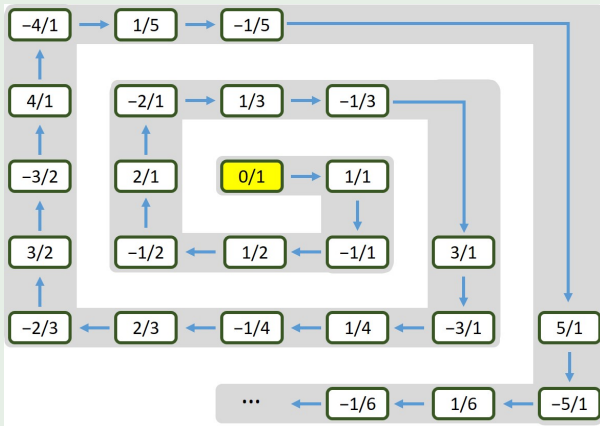
## Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz  $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ , mert végtelen, és a nyilak mentén sorozatba rendezhető.



## Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz  $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ , mert végtelen, és a nyilak mentén sorozatba rendezhető.



## Számosságáritmetika Alaptétele.

Legyenek  $A$  és  $B$  halmazok úgy, hogy legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres). Ekkor  $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$ .

### Tétel.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0.$$

### Tétel.

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

## Bizonyítás.

A Számosságáritmetika Alaptételét felhasználva

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}| = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}|, |\mathbb{Z}|),$$

adódik, de  $|\mathbb{Z}| = \aleph_0 < \mathfrak{c}$ , így  $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = \mathfrak{c}$ .



# E-teszt: Leképezések (1. feladat)

## E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto |n - 3| + 1$  leképezés injektív. **Hamis**, mert  $1 \mapsto |1 - 3| + 1 = 3$  és  $5 \mapsto |5 - 3| + 1 = 3$ .
- Az  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $x \mapsto (x - 1, 1)$  leképezés szürjektív. **Hamis**, mert  $\mathbb{Z}^2$  azon elemei állnak csak elő képként, amelyeknek a második komponense 1. Például  $(1, 2)$ -nek nincs őse.
- Az  $\alpha: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $(x, y) \mapsto |x - y|$  leképezés szürjektív. **Igaz**, mert tetszőleges  $n \in \mathbb{N}_0$  esetén  $(n, 0) \mapsto |n - 0| = n$ .

## E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az  $\{1, 2, 3\}$  halmazról az  $\{1, 2, 3\}$  halmazba 20 szürjektív leképezés létezik. **Hamis.** Ha  $A$  véges halmaz, akkor  $A$ -ból  $A$ -ba minden szürjektív leképezés injektív is (azaz bijektív is). Mivel injektív leképezés esetén különböző elemek képe különböző, így  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  injektív (szürjektív) leképezés van.
- Létezik  $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$  bijektív leképezés. **Hamis,** mert  $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ , és a Számosságaritmetika Alaptételét felhasználva  $|\mathbb{Q}^7| = \aleph_0$ , de  $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > \aleph_0 = |\mathbb{Q}^7|$ . Tehát nem létezik bijektív leképezés.
- $|(1; 4)| = |(1; 2)|$ . **Igaz,** mert egy korábbi tétel szerint tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$  esetén  $|(a; b)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ .