

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

4. előadás

Relációk

Halmazelmélet

Relációk: megadásuk és szemléltetésük

Definíció: megfeleltetés, indulási és érkezési halmaz, reláció.

Legyenek A és B halmazok. Az $A \times B$ részhalmazait A -ból B -be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. A $\tau \subseteq A \times B$ megfeleltetés indulási halmaza A , érkezési halmaza B . Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

Megjegyzés.

A relációk lényegében ugyanazok, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa.

- Relációként:

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m < n\}$$

- Predikátumként:

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \{i, h\}, (m, n) \mapsto \begin{cases} i, & \text{ha } m < n, \\ h, & \text{különben.} \end{cases}$$

Pontosan azokból az elempárokból áll a reláció, ahol a predikátum értéke i .

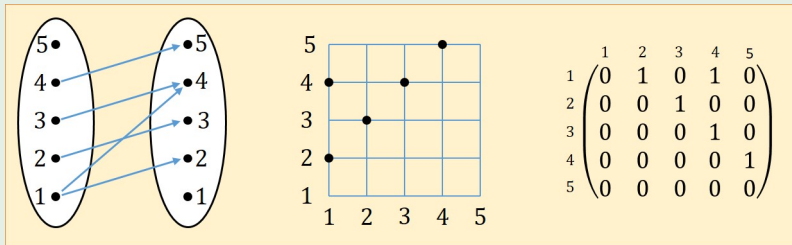
Megjegyzés.

A $\varrho \subseteq A \times A$ relációt szemléltethetjük

- **nyíldiagrammal**: az $(a, b) \in \varrho$ párt az a pontból a b pontba irányított nyíllal ábrázoljuk,
- **koordinátarendszerben**: az $(A \times A)$ Descartes-szorzatot ábrázoljuk koordinátarendszerben, és megjelöljük a ϱ részhalmazba tartozó elemeket,
- **mátrixszal**: ha $|A| = n$, akkor A elemeit megszámozzuk, és aszerint írunk 1-et, illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i -edik sorának j -edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban. (Informatikában gyakran használják ezt a módszert, a relációkat a bitmátrixukkal adják meg.)

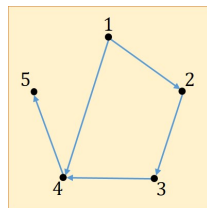
Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\varrho = \{(a, b) \in A \times A : a + 1 \text{ osztója } b\text{-nek}\}$.



Megjegyzés.

A nyíldiagram helyett gráffal is szemléltethetjük a relációkat, ha az A halmazon belül húzzuk be az éleket.



Megjegyzés.

Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ reláció esetén $(a, b) \in \varrho$ helyett az $a\varrho b$ jelölést is alkalmazhatjuk. Általában ez jellemző a jól ismert relációkra: pl. $2 \leq 3$ -t írunk $(2, 3) \in \leq$ helyett.

Megjegyzés.

Mivel bármely $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk egyben halmazok is, ezért relációkon is elvégezhetők a halmazműveletek.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és

$$\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A^2,$$

$$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A^2.$$

- $\alpha \cap \beta = \{(1, 3), (3, 4)\},$
- $\alpha \cup \beta = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 5), (5, 6)\},$
- $\alpha \setminus \beta = \{(1, 1), (2, 3), (5, 6)\},$
- $\alpha \triangle \beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (5, 5), (5, 6)\}.$

Példa.

Jelölje E az emberek halmazát, és legyenek

$$\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq E \times E,$$

$$\delta = \{(x, y) : x \text{ apja } y\} \subseteq E \times E$$

relációk az E halmazon. Ekkor

$$\gamma \cap \delta = \{(x, y) : x \text{ anyja és apja } y\} = \emptyset \subseteq E^2,$$

$$\gamma \cup \delta = \{(x, y) : x \text{ anyja vagy apja } y\} = \{(x, y) : x \text{ szülője } y\} \subseteq E^2.$$

Definíció.

Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ relációra definiáljuk annak **inverzét**:

$$\varrho^{-1} = \{(x, y) \in A \times A : (y, x) \in \varrho\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho$.

Példa.

(a) Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ reláció az A halmazon.

$$\alpha^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 5)\}.$$

(b) Jelölje E az emberek halmazát, és $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\}$.

$$\gamma^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \gamma\} = \{(x, y) : y \text{ anyja } x\}.$$

Definíció: relációk szorzata.

Legyen ϱ és σ reláció az A halmazon, azaz $\varrho, \sigma \subseteq A \times A$. A ϱ és σ relációk **szorzata**:

$$\varrho\sigma = \{(x, y) \in A \times A : (\exists z \in A)((x, z) \in \varrho \wedge (z, y) \in \sigma)\}.$$

Megjegyzés.

A ϱ és σ relációk szorzatára szokás még a $\varrho \circ \sigma$ jelölést is használni.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és

$$\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A^2,$$

$$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A^2,$$

akkor

pl. $(1, 4) \in \alpha\beta$, mert $(1, 3) \in \alpha$ és $(3, 4) \in \beta$, (pl. $z = 3$)

pl. $(5, 6) \in \beta\alpha$, mert $(5, 5) \in \beta$ és $(5, 6) \in \alpha$. (pl. $z = 5$)

$$\alpha\beta = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\},$$

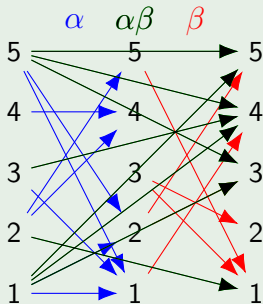
$$\beta\alpha = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (5, 6)\}.$$

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 2)\} \subseteq A^2$,

$\beta = \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (5, 1)\} \subseteq A^2$.



Ekkor $\alpha\beta = \{(1, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 4), (5, 4), (5, 3), (5, 5)\}$.

Vizuálisan az a kérdés, hogy mely bal oldali elemből tudok eljutni egy középső elemen keresztül valamelyik jobb oldaliba. (Cherchez la flèche bleu-rouge.)

Példa.

Jelölje E az emberek halmazát és legyen

$$\sigma = \{(x, y) \in E \times E : x \text{ szülője } y\text{-nak}\}.$$

Meghatározzuk a $\sigma\sigma$ és a $\sigma^{-1}\sigma$ relációkat. Mivel

$$\begin{aligned}\sigma\sigma &= \{(x, y) \in E \times E : (\exists z \in E)((x, z) \in \sigma \wedge (z, y) \in \sigma)\} \\ &= \{(x, y) \in E \times E : (\exists z \in E)(x \text{ szülője } z\text{-nek} \wedge z \text{ szülője } y\text{-nak})\},\end{aligned}$$

ezért

$$\sigma\sigma = \{(x, y) \in E \times E : x \text{ nagyszülője } y\text{-nak}\}.$$

Példa. (folyt.)

Mivel

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\sigma &= \{(x, y) \in E \times E : (\exists z \in E)((x, z) \in \sigma^{-1} \wedge (z, y) \in \sigma)\} \\ &= \{(x, y) \in E \times E : (\exists z \in E)((z, x) \in \sigma \wedge (z, y) \in \sigma)\} \\ &= \{(x, y) \in E \times E : (\exists z \in E)(z \text{ szülője } x\text{-nek} \wedge z \text{ szülője } y\text{-nak})\},\end{aligned}$$

ezért

$$\sigma^{-1}\sigma = \{(x, y) \in E \times E : x \text{ testvére vagy féltestvére } y\text{-nak, vagy } x = y\}.$$

Tétel.

Tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \subseteq A \times A$ relációk esetén teljesülnek a következők:

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, (a relációk szorzása asszociatív)
- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Megjegyzés.

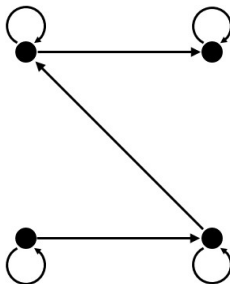
Ahogy egy korábbi példában is láttuk, a relációk szorzása NEM KOMMUTATÍV, azaz a tényezők sorrendje általában nem cserélhető fel.

Definíció.

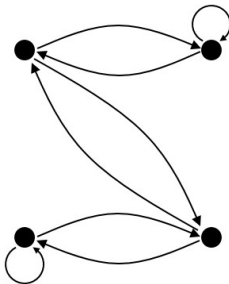
Azt mondjuk, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$ elemre $(x, x) \in \alpha$ teljesül,
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$,
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$,
- **transzitiv**, ha bármely $x, y, z \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$,
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.

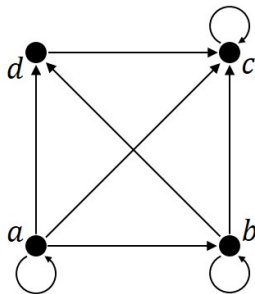
Relációtulajdonságok gráffal



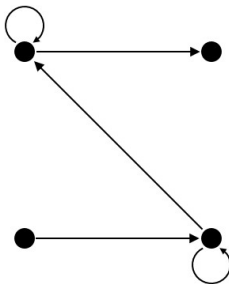
reflexív reláció = a reláció gráfjának minden csúcsában hurokél van



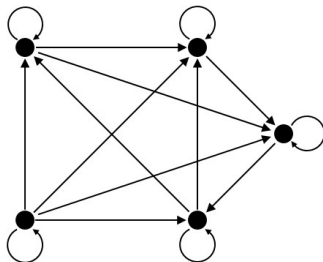
szimmetrikus reláció = a reláció gráfjának két pontja között
van az egyik irányban él,
akkor van a másik irányban is



transzitiv reláció = a reláció gráfjának bármely két csúcsára, ha az egyikből irányított élek mentén el tudunk jutni a másikba, akkor egyetlen irányított él mentén is eljuthatunk (pl. az $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c$ útvonal miatt $a \rightarrow c$ él is kell legyen)



antiszimmetrikus reláció = a reláció grájában különböző csúcsok között legfeljebb egy irányban megy él



dichotóm reláció = a reláció grájában bármely két csúcs között legalább egy irányított él megy

Minden dichotóm reláció egyúttal reflexív is (hiszen a „bármely két csúcs” egybe is eshet).

Ekvivalenciareláció, részbenrendezés, rendezés

Definíció: ekvivalenciareláció.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Definíció: részbenrendezés.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Definíció: rendezés.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Példa.

Megvizsgáljuk, hogy a tanultak közül mely relációtulajdonsággal rendelkeznek az alábbi relációk:

- $\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \leq |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\varrho = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol A halmaz és $|A| \geq 2$.

A tulajdonságok vizsgálata után eldöntjük, hogy a reláció ekvivalenciareláció, részbenrendezés vagy rendezés-e.

Az α reláció tulajdonságai

Példa. (folyt.)

$$\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- Reflexivitás: Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát α NEM reflexív.
- Szimmetria: IGEN, hiszen ha $a + b = 2$, akkor $b + a = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
- Antiszimmetria: Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
- Transzitivitás: Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
- Dichotómia: Az α reláció NEM dichotom, mivel pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Tehát α NEM ekvivalenciareláció, NEM részbenrendezés és NEM rendezés.

A β reláció tulajdonságai

Példa. (folyt.)

$\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$ -en.

- Reflexív, mivel minden szám osztható önmagával.
- NEM szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztója a 2-nek.
- Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymásnak kölcsönösen osztója, akkor egyenlőek.
- Transitív is, ha a osztója b -nek és b osztója c -nek, akkor a osztója c -nek: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$.
- NEM dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve, egyik sem osztója a másiknak.

Tehát β részbenrendezés, de NEM rendezés és NEM ekvivalenciareláció.

A γ és δ relációk tulajdonságai

Példa. (folyt.)

- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, tehát rendezés és részbenrendezés is. Azonban nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \leq |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, tranzitív, dichotom, de nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus (mert pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \delta$, de $1 \neq -1$). Ezért nem ekvivalencia, nem részbenrendezés, és akkor nem is rendezés.

A μ és ϱ relációk tulajdonságai

Példa. (folyt.)

- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív, tehát ekvivalenciareláció. Nem dichotom (pl. $(1, 2), (2, 1) \notin \mu$) és nem antiszimmetrikus (pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \mu$, de $1 \neq -1$). Ezért nem részbenrendezés, és akkor persze nem rendezés.
- $\varrho = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol A halmaz és $|A| \geq 2$: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát részbenrendezés. Mivel $|A| \geq 2$, nem dichotom. Ezért nem rendezés. Nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalenciareláció.

Mi a kapcsolat a relációtulajdonságok között?

Megjegyzés.

Ha egy reláció dichotom, akkor reflexív. Másképpen fogalmazva: Ha nem reflexív a reláció, akkor nem is dichotom.

Megjegyzés.

Van olyan reláció, ami szimmetrikus és antiszimmetrikus:

$$\{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}.$$

Szimmetrikus relációk jellemzése

Tétel.

Tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció szimmetrikus $\iff \alpha \subseteq \alpha^{-1}$.

Bizonyítás.

(„ $\Rightarrow$ ”) Tegyük fel, hogy α szimmetrikus. A szimmetriát felhasználva $\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\} = \{(x, y) : (x, y) \in \alpha\} = \alpha$ adódik. Tehát $\alpha = \alpha^{-1}$, és így annál inkább teljesül az $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ tartalmazás.

(„ $\Leftarrow$ ”) Tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Ha $(x, y) \in \alpha$, akkor a feltevés szerint $(x, y) \in \alpha^{-1}$ is teljesül. Az inverz definíciója miatt ez azt jelenti, hogy $(y, x) \in \alpha$. Tehát, ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$, azaz α szimmetrikus. $\diamond$

Tranzitív relációk jellemzése, reflexív/szimmetrikus relációk szorzata

Tétel.

Tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció pontosan akkor tranzitív, ha $\alpha\alpha \subseteq \alpha$.

Tétel.

Tetszőleges $\alpha, \beta \subseteq A^2$ reflexív relációk esetén az $\alpha\beta$ szorzat is reflexív.

Megjegyzés.

Szimmetrikus relációk szorzata nem mindig szimmetrikus. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(2, 3), (3, 2)\} \subseteq A^2$. Mindkét reláció szimmetrikus, és $(1, 3) \in \alpha\beta$, de $(3, 1) \notin \alpha\beta$.

E-teszt: Relációk (1. fel.)

Az elektronikus tesztek a <http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/> oldalon érhetők el. Az első két elektronikus teszt már kitölthető. A Relációk teszt az 5. hét végén indul.

E-teszt.

Döntse el, hogy az

$$\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\},$$

$$\beta = \{(1, 4), (4, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}, \text{ és}$$

$$\gamma = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 3)\}$$

relációk esetén az alábbi állítások közül melyek az igazak, és melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- $(3, 2) \in \alpha\gamma$. **Hamis**, $(3, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \notin \gamma$.
- $(1, 4) \notin \beta^{-1}\gamma$. **Igaz**, $(1, 3) \in \beta^{-1}$, de $(3, 4) \notin \gamma$.
- $(4, 3) \in \beta^{-1}\alpha^{-1}$. **Igaz**, $(4, 1) \in \beta^{-1}$ és $(1, 3) \in \alpha^{-1}$.