

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

3. előadás

Halmazok

Halmazelmélet

Mi a halmaz?

A **halmaz** és a **halmaz eleme** alapfogalom, nem definiáljuk, de körülírhatjuk, hogy mit tekinthetünk halmaznak. Halmazon elemek egyértelműen meghatározott összességét értjük. Fontos, hogy bármely x -re (a kismacskától a $\sqrt{2}$ -ig) objektíven meghatározható legyen, hogy x eleme vagy nem eleme a kérdéses összességnek. (Például az I. éves szorgalmas informatikus hallgatók összessége nem alkot halmazt, mert a szorgalom megítélése szubjektív.) Az, hogy a halmaz az elemek egyértelműen meghatározott összessége, arra vonatkozik, hogy mindenki pontosan ugyanazon x -eket tekintse az összesség elemeinek. Tehát az objektivitásra utal, és nem arra, hogy ténylegesen el tudjuk-e dönteni, hogy x eleme-e a halmaznak.

Halmaz megadása

Jelölés.

Az $x \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy x eleme az A halmaznak. A halmazt többnyire a $\{, \}$ zárójelek között az elemek „felsorolásával” adjuk meg, de megadhatjuk ún. általános elem és definiáló tulajdonságok segítségével is.

Példa.

- $\{2, 3, 5, 7\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ egyjegyű prímszám}\}.$
- $\{2, 3, 4, 5, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\}.$
- $\{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N})(x = 3y)\} = \{x \in \mathbb{N} : 3 \text{ osztója } x\text{-nek}\}.$
- $\{(x, y) : x, y \text{ valós számok és } x^2 + y^2 < 1\},$ az origó középpontú egységgörbő belső pontjainak halmaza.

Definíció.

Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy $A = B$. Halmaz esetén minden elem csak egyszer számít, tehát például $\{1, 2, 3, 1, 2, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Definíció: részhalmaz.

Ha A minden eleme B -nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B -nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz **valódi részhalmaza** B -nek, amelyet $A \subset B$ -vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Definíció: üreshalmaz.

Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük (jel.: $\emptyset$). Azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül az üreshalmazra.

Tétel.

Tetszőleges A, B, C halmazokra

- (a) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$,
- (b) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (ún. tranzitivitás),
- (c) $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ (ún. antiszimmetria).

Megjegyzés.

Bármely A halmaz esetén az A és $\emptyset$ halmazokat az A halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

A (c) rész (antiszimmetria) gyakran hasznos annak igazolására, hogy két halmaz egyenlő.

Példa.

Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, (3 - 1)\}$, $C = \{1, 1, 2\}$, $D = \{\emptyset, 1, 2\}$, $E = \{\{1\}, 2\}$ és $F = \{\{1, 2\}\}$.

- $A = B = C$, a D , E és F halmazok páronként különbözők.
- Elemek száma: a D halmaznak három, F -nek egy eleme van, a többi halmaz kételemű.
- Az $\{1\}$ halmaz részhalmaza az A , B , C és D -nek, de E és F -nek nem.
- Az $\{1\}$ halmaz eleme az E -nek, a többinek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz részhalmaza az A , B , C és D -nek, de E és F -nek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz eleme az F -nek, a többinek nem.
- Az $\emptyset$ halmaz minden halmaznak részhalmaza (ld. előző tétel (a) része).
- Az $\emptyset$ halmaz eleme a D halmaznak (abban van felsorolva elemként), a többinek nem.

Definíció.

Legyen F olyan formula, melynek csak az x változó szabad változója. Ekkor $\{x : F\}$ azt az A halmazt jelöli, amelyre $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$ teljesül. Ha nem világos, hogy x milyen U individuumtartomány eleme lehet, akkor az $\{x \in U : F\}$ jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

Példa.

Az $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ osztója } 6\text{-nak}\}$, $\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6\}$, $\{\text{hat pozitív osztói}\}$ halmazok mind egyenlők.

Definíció: unió és metszet, diszjunkt halmazok.

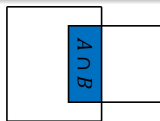
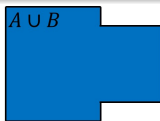
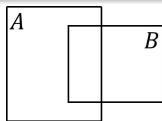
Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket** (uniójukat) és **metszetüket**:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B **diszjunktak**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Megjegyzés.

Szokás a halmazokat síkbeli tartományokkal, azaz ún. **Venn-diagramokkal** szemléltetni. A Venn-diagram nem mindig szemlélteti az általánosságot, tehát Venn-diagramokkal – általában – egzakt bizonyítás nem adható.



Definíció: komplementer.

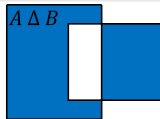
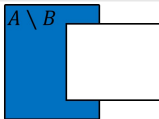
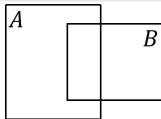
Legyen rögzítve egy U (halmaz az) **univerzum (alaphalmaz)**. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A halmaz komplementerét:

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Definíció: különbség és szimmetrikus különbség.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}, \quad A \triangle B = \{x : x \in A \leftrightarrow x \notin B\}.$$



Tétel (a kommutativitásról & az asszociativitásról).

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \triangle B = B \triangle A,$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Tétel (a disztributivitásról).

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Megjegyzés.

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekvivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel (egyéb azonosságok).

Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra érvényesek:

$$\begin{array}{lll} A \cap A = A, & A \cup A = A, & \text{(idempotencia)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \end{array}$$

valamint a De Morgan azonosságok:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Tétel (további egyéb azonosságok).

Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra érvényesek:

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset,$$

$$A \cap U = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

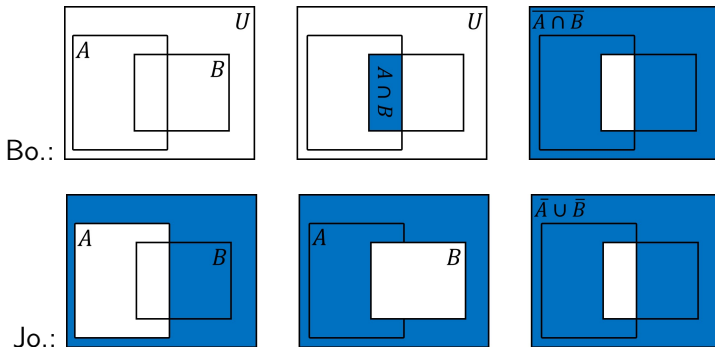
$$A \cup \overline{A} = U,$$

$$A \cup U = U,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Az $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ De Morgan azonosság Venn-diagrammos „bizonyítása”:



Definíció: metszet és unió általában.

Legyen $\mathcal{I}$ tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in \mathcal{I}$ -re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x : (\forall i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \quad (\text{metszet}),$$

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x : (\exists i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \quad (\text{unió}).$$

Ha $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{vagy} \quad A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Példa.

Mutassuk meg, hogy a metszet disztributív a szimmetrikus differenciára:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

1. megoldás (táblázat segítségével): Legyenek $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok, valamint legyen $L = A \cap (B \triangle C)$ és $R = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $x \in U$ elemre $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Nyolc esetet különböztetünk meg annak megfelelően, hogy az A, B, C halmazok közül az x melyiknek eleme. A következő táblázatban az $\in$, illetve $\notin$ úgy értendő, hogy x eleme, illetve nem eleme az oszlopfejlécként írt halmaznak. A táblázat kitöltése után látható, hogy $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Tehát $L = R$. 

Példa (folyt.).

A	B	C	$B \triangle C$	L	$A \cap B$	$A \cap C$	R
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

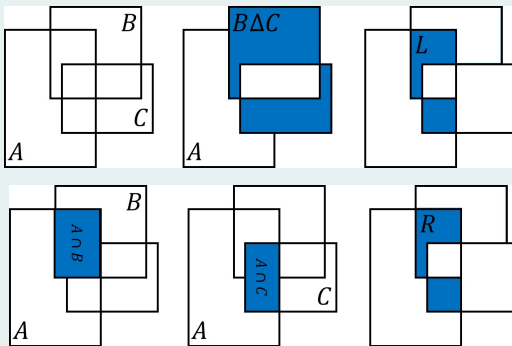


Megjegyzés.

Ez a táblázat nagyon emlékeztet az ítéletkalkulusnál látott igazságtáblázatokra. Ez nem véletlen, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Példa (folyt.).

2. megoldás (Venn-diagram segítségével): Korábban említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most, ha olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat veszünk fel az ábrán, ahol az előző nyolc eset mindegyike fellép, akkor az előző bizonyítást ismételhetjük meg szemléletes formában. (Több halmaz esetén a Venn-diagramot nehezebb felrajzolni.)



Rendezett elempár

Definíció: rendezett elempár.

Tetszőleges a és b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a az első és b a második komponense. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $(a, b) = (c, d)$ pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

Megjegyzés.

A komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben a halmazok esetén a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció: Descartes-szorzat.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Azonos tényezők szorzatát hatványként is jelölhetjük: pl. $A \times A = A^2$.

Példa.

Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata az

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

hatelemű halmaz.

Tétel.

Tetszőleges A és B halmazokra $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$ teljesül.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy (a, b) eleme az $A \times \emptyset$ Descartes-szorzatnak. Ekkor $b \in \emptyset$ következik, ami nem lehetséges. Így ellentmondásra jutottunk. $\diamond$

Definíció: hatványhalmaz.

Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A halmaz **hatványhalmazának** nevezzük és $P(A)$ -val jelöljük, azaz $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.

Példa.

Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű.

Példa.

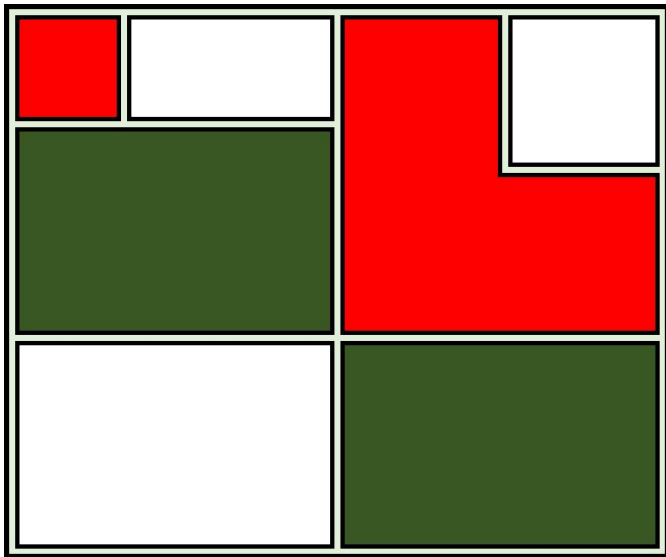
- Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan 1-elemű halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz.
- Mivel a $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ halmaznak az üreshalmaz és önmaga a két részhalmaza, így $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Definíció: osztályozás.

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás az A halmazon** vagy más szóval **osztályozása az A halmaznak**, ha

- (1) bármely $X \in \mathcal{C}$ -re $X \neq \emptyset$,
- (2) bármely $X, Y \in \mathcal{C}$ -re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$,
- (3) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik az A halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.



Példa.

Osztályozás-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az adott A halmazon?

(a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{C} = \{X \subseteq A : |X| = 3\}$,

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$,

(c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$.

(a) Nem, a részhalmazok nem diszjunktak.

(b) Igen.

(c) Nem, mert a részhalmazok nem fedik le A -t.

Példa.

Keressük meg $A = \{1, 2, 3\}$ összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$ -beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2 + 1$), vagy három egyelemű osztályra ($3 = 1 + 1 + 1$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A -nak:

$$\{\{1, 2, 3\}\},$$

$$\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

E-teszt: Predikátumkalkulus, Halmazok (2. fel.)

Az elektronikus tesztek a <http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/> oldalon érhetők el. Az első elektronikus teszt **szept. 20-tól**, a második elektronikus teszt **szept. 27-től tölthető ki**.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges U halmazra és tetszőleges (nem feltétlen különböző) $a, b \in U$ elemekre (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- $|\{(a, b)\}| = 2$. **Hamis**, csak egy eleme van (a, b) .
- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \cup \emptyset$. **Igaz**.
- $\{a, b\} \in \{a, b\}$. **Hamis**, $a, b \in \{a, b\}$, de az $\{a, b\}$ nem eleme, hanem részhalmaza önmagának.