

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- A dolgozatírásnál számológép használható.
- Minden választ indokolni kell, a végeredmény puszta közlése nem elegendő.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$ és a $\beta^{-1}\alpha$ leképezéseket, ahol

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 2^{x+1}, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\beta = 3x.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(\alpha\beta) = 3 \cdot 2^{x+1}$
 $\beta^{-1}\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(\beta^{-1}\alpha) = 2^{\frac{x}{3}+1}$

2. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, bijektívek-e. **Válaszát indokolja!** ($\mathbb{N}$ a pozitív egész számokat, $\mathbb{Z}$ az egész számokat jelöli.)

- (a) $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto |x-1| + 3$;
 (b) $\beta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Injektív, mivel x természetes szám, $x-1 \geq 0$, így $x\alpha = |x-1| + 3 = (x-1) + 3 = x+2$, tehát ha $x_1\alpha = x_2\alpha$, azaz $x_1 + 2 = x_2 + 2$, akkor $x_1 = x_2$.
 Nem szürjektív, mert például a 2-nek nincs őse.
 Nem bijektív, mert nem szürjektív.
- (b) Nem injektív, például $(1, 4)\alpha = 4$ és $(2, 2)\alpha = 4$.
 Szürjektív, bármely $z \in \mathbb{Z}$ esetén $(1, z)\alpha = z$, tehát minden $\mathbb{Z}$ -beli elemnek van őse.
 Nem bijektív, mert nem injektív.

3. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

- (a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;
 (b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{Z}$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ végtelen halmaz, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, és $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, így $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}| = \aleph_0$. Mivel $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, a Számosságaritmetika Alaptételéből $|\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.
- (b) $|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ és $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, így a Számosságaritmetika Alaptételéből következik, hogy $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$. Továbbá $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.

4. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\frac{\overline{(2+i)}(1+3i)}{3+2i}.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\frac{25}{13} + \frac{5}{13}i$.

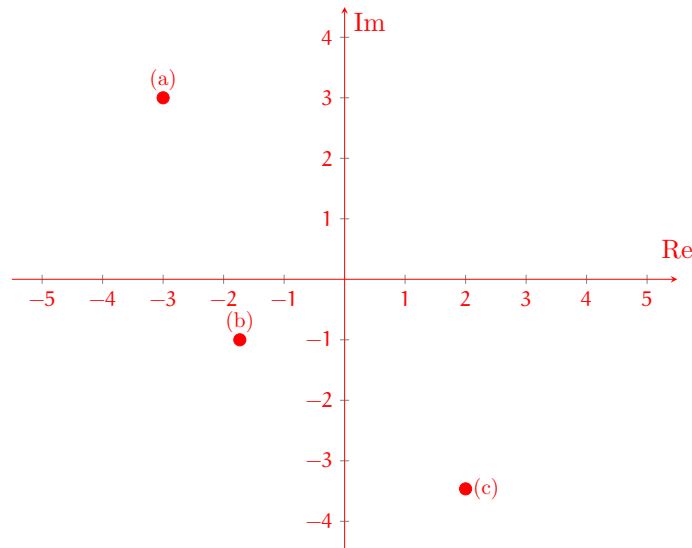
5. Feladat.

- (a) Ábrázolja, majd adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
 (b) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.
 (c) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $4e^{\frac{5\pi}{3}i}$ komplex számot.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.
 (b) $-\sqrt{3} - i$.
 (c) $2 - 2\sqrt{3}i$.



6. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $2\sqrt{3} - 2i$ komplex számot.
 (b) Végezze el a $\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right)^{26}$ hatványozást a komplex számok körében a tanult képlet felhasználásával. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $4\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$.
 (b) $2^{13}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2^{13}i$.

7. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $3 - 3i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\sqrt[3]{3}(\cos \pi + i \sin \pi)$ gyökvonást a tanult képlet felhasználásával. A gyököket adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
- (b) $\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i,$
 $\sqrt[3]{3}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt[3]{3},$
 $\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i.$

8. Feladat. Határozza meg a következő polinom **komplex gyökeit**, és adja meg a **gyöktényezős felbontását**. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$x^5 - 3x^3 - 10x.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Gyökei: $0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$,
gyöktényezős felbontása: $x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i).$

9. Feladat.

 Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ha létezik, számítsa ki az alábbi mátrixokat, ha valamelyik nem létezik, indokolja. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. **Amikor mátrixokat szoroz, legalább két elem kiszámítását részletesen is írja le.**

- (a) AB , (b) $A + (B^T C)$, (c) $(A^T + B)C$. (6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $AB = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, két elem kiszámítása: $4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -11$ és $4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 3$.
- (b) $A + (B^T C)$ nem létezik, mert $B^T C$ nem létezik, ugyanis a B^T mátrix (2×3) -as, míg a C mátrix (2×2) -es, így B^T oszlopainak száma nem egyenlő C sorainak számával.
- (c) $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $(A^T + B)C = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, két elem kiszámítása: $2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 9$
és $2 \cdot 2 + 1 \cdot 9 = 13$.

10. Feladat. Határozza meg az alábbi determináns értékét. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. -25

11. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & x \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $x = 1$.

12. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix sajátértékeit. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $-2, 4, 5$.

13. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 9 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Feladat.

- (a) Oldja meg Gauss-elimináció felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned}$$

- (b) Egy lineáris egyenletrendszer megoldása során a következő mátrixhoz jutottunk. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Adja meg az egyenletrendszer általános megoldását is (kötött, szabad ismeretlenek).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

(6 pont)

MEGOLDÁS.

(a) Nincs megoldás.

(b) Végtelen sok megoldás van, x_4 szabad ismeretlen. Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$\{(2x_4 + 5, x_4 - 2, -2x_4 + 3, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

15. Feladat. Döntse el, hogy a $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (-3, -8, 9)$ vektorrendszer lineárisan független-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben. **Válaszait indokolja!** (6 pont)

MEGOLDÁS. Gauss-eliminációval igazolható, hogy nem lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

16. Feladat. Határozza meg a $v = (3, -7, -2)$ vektor koordináta-sorát a $(-1, -2, 2)$, $(1, -2, -3)$, $(2, 3, 3)$ bázisban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. (6 pont)

MEGOLDÁS. A koordináta-sor: $(2, 3, 1)$.

17. Feladat. Határozza meg, hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere, valamint adja meg a megoldástér egy bázisát. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. A megoldástér 2-dimenziós, például egy bázisa: $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$.

18. Feladat. Adjon meg az A mátrix $\lambda = 3$ sajátértékéhez tartozó U_λ sajátalterében egy bázist. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Például egy bázis: $(-2, -1, 1)$.