

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- A dolgozatírásnál számológép használható.
- Minden választ indokolni kell, a végeredmény puszta közlése nem elegendő.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$ és a $\beta^{-1}\alpha$ leképezéseket, ahol

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 2^{x+1}, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\beta = 3x.$$

(6 pont)

2. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, bijektívek-e. **Válaszát indokolja!** ($\mathbb{N}$ a pozitív egész számokat, $\mathbb{Z}$ az egész számokat jelöli.)

- (a) $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto |x - 1| + 3;$
 (b) $\beta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy.$

(6 pont)

3. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

- (a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R};$
 (b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{Z}.$

(6 pont)

4. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\frac{\overline{(2 + i)}(1 + 3i)}{3 + 2i}.$$

(6 pont)

5. Feladat.

- (a) Ábrázolja, majd adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
 (b) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.
 (c) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $4e^{\frac{5\pi}{3}i}$ komplex számot.

(6 pont)

6. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $2\sqrt{3} - 2i$ komplex számot.
 (b) Végezze el a $\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right)^{26}$ hatványozást a komplex számok körében a tanult képlet felhasználásával. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(6 pont)

7. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $3 - 3i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\sqrt[3]{3(\cos \pi + i \sin \pi)}$ gyökvonást a tanult képlet felhasználásával. A gyököket adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(6 pont)

8. Feladat. Határozza meg a következő polinom **komplex gyökeit**, és adja meg a **gyöktényezős felbontását**. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$x^5 - 3x^3 - 10x.$$

(6 pont)

9. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ha létezik, számítsa ki az alábbi mátrixokat, ha valamelyik nem létezik, indokolja. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. **Amikor mátrixokat szoroz, legalább két elem kiszámítását részletesen is írja le.**

- (a) AB , (b) $A + (B^T C)$, (c) $(A^T + B)C$. (6 pont)

10. Feladat. Határozza meg az alábbi determináns értékét. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(6 pont)

11. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & x \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

(6 pont)

12. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix sajátértékeit. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

13. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

14. Feladat.

- (a) Oldja meg Gauss-elimináció felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\-3x_1 - 4x_2 - 7x_3 &= -8\end{aligned}$$

- (b) Egy lineáris egyenletrendszer megoldása során a következő mátrixhoz jutottunk. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Adja meg az egyenletrendszer általános megoldását is (kötött, szabad ismeretlenek).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

(6 pont)

15. Feladat. Döntse el, hogy a $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (-3, -8, 9)$ vektorrendszer lineárisan független-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben. **Válaszeit indokolja!** (6 pont)

16. Feladat. Határozza meg a $v = (3, -7, -2)$ vektor koordinátasorát a $(-1, -2, 2)$, $(1, -2, -3)$, $(2, 3, 3)$ bázisban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. (6 pont)

17. Feladat. Határozza meg, hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adja meg a megoldástér egy bázisát. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\-3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0\end{aligned}$$

(6 pont)

18. Feladat. Adjon meg az A mátrix $\lambda = 3$ sajátértékéhez tartozó U_λ sajátalterében egy bázist. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(6 pont)