

---

---

# DISZKRÉT MATEMATIKA I.

---

4. FELADATSOR

RELÁCIÓK

MBNXK111

---

**4.1. Feladat.** Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  és  $\alpha, \beta \subseteq A \times A$  relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \quad \text{és} \quad \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

- |                           |                                |                                |                     |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| (a) $\alpha \cap \beta$ , | (b) $\alpha \setminus \beta$ , | (c) $\alpha^{-1}$ ,            | (d) $\alpha\beta$ , |
| (e) $\beta\alpha$ ,       | (f) $\beta\alpha^{-1}$ ,       | (g) $\beta \cap \alpha^{-1}$ . |                     |

**4.2. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi  $\alpha$  és  $\beta$  relációk esetén az  $\alpha^{-1}$ ,  $\alpha\beta$  és  $\beta\alpha$  relációkat. (Az  $\mathbb{E}$  az emberek halmazát jelöli.)

- (a)  $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \text{ az } x \text{ apja}\}$ ,
- (b)  $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2^y\}$ ,
- (c)  $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 = 3x\}$ .

**4.3. Feladat.** Adjuk meg a  $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$  halmazon értelmezett  $\rho = \{(a, b) : a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$  reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

**4.4. Feladat.** Adjunk meg a gráfjával az  $A = \{a, b, c, d\}$  halmazon egy olyan relációt, amely

- (a) reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
- (b) antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
- (c) dichotom de nem reflexív.

**4.5. Feladat.** Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

- (a)  $\{(a, b) : |a - b| \leq 2\}$  a  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazon,
- (b)  $\{(x, y) : x \leq y\}$  az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazán,
- (c)  $\{(x, y) : x < y\}$  a valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán,
- (d)  $\{(a, b) : ab \geq 0\}$  a valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán,
- (e)  $\{(a, b) : a^2 \geq b^2\}$  az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazán,
- (f)  $\{(x, y) : |x| = |y|\}$  a valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán,
- (g)  $\{(x, y) : 2 \mid x + y\}$  a természetes számok  $\mathbb{N}$  halmazán,
- (h)  $\{(a, b) : 4 \mid b - a\}$  az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazán,
- (i)  $\{(a, b) : a^2 < b^2\}$  az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazán,
- (j)  $\{(X, Y) : X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$  halmazon.

**4.6. Feladat.** Adjon meg olyan osztályozást az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

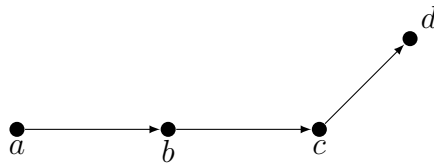
**4.7. Feladat.** Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a)  $\{(a, b) : ab > 0\}$  az  $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  halmazon
- (b)  $\{(a, b) : 3 \mid b - a\}$  az  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazon
- (c)  $\{(H, G) : |H| = |G|\}$  az  $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$  halmazon
- (d)  $\{(x, y) : x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$  az  $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$  halmazon
- (e)  $\{(x, y) : x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$  az  $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$  halmazon
- (f)  $\{(a, b) : |a| = |b|\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon
- (g)  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \text{ páros}\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon

**4.8. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

- (a)  $(A; \subseteq)$ , ahol  $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ ,
- (b)  $(B; \subseteq)$ , ahol  $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ,
- (c)  $(C; |)$ , ahol  $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$ ,
- (d)  $(D; |)$ , ahol  $D = \{0, 1, 2, 4, 7, 14, 28, 32\}$ ,
- (e)  $(E; \sqsubseteq)$ , ahol  $E = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$  és  $a \sqsubseteq b$  pontosan akkor teljesül, ha  $a$  minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint  $b$  megfelelő számjegye,
- (f)  $(F; \leq)$ , ahol  $F = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$  és  $\leq$  a komponensenkénti részbenrendezés.

**4.9. Feladat.** Adjuk meg a következő gráf által meghatározott  $\rho$  reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, reflexív és tranzitív lezártját.



**4.10. Feladat.** Legyen  $\rho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$  reláció az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazon. Rajzoljuk fel a  $\rho$  gráfját és adjuk meg (ne csak a gráfjával)

- (a)  $\rho$  reflexív lezártját,
- (b)  $\rho$  szimmetrikus lezártját,
- (c)  $\rho$  tranzitív lezártját,
- (d)  $\rho$  reflexív és tranzitív lezártját.

**4.11. Feladat.** Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

- (a)  $\{(a, b) \in A^2 : |a - b| = 2\}$ , ahol  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- (b)  $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b = 0\}$ ,
- (c)  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\}$ ,
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 1\}$ .