
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

2. FELADATSOR

A PREDIKÁTUMKALKULUS ELEMEI

MBNXK111

2.1. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:

$$M(x): „x négyzetszám”, \quad P(x): „x páros szám”, \quad N(x): „x negatív szám”.$$

- kétváltozós predikátum:

$$O(x, y): „x osztója y-nak”,$$

- kétváltozós függvény(jel)ek

$$o(a, b) = a + b, \text{ azaz } a \text{ és } b \text{ szokásos összege,} \quad s(a, b) = a \cdot b, \text{ azaz } a \text{ és } b \text{ szokásos szorzata.}$$

Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

- | | |
|---|---|
| (a) $P(7)$, | (b) $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$, |
| (c) $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$, | (d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$, |
| (e) $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$, | (f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$, |
| (g) $(\forall x)\left(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y))\right)$, | |
| (h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$, | |
| (i) $(\exists x)\left(P(x) \wedge (\forall y)\left((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))\right)\right)$. | |

2.2. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz, és legyen f az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y): x + y = 5, \quad Q(x): x \text{ páros}, \quad E(x, y): x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- | | |
|--|---|
| (a) $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$, | (b) $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$, |
| (c) $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$, | (d) $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$, |
| (e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$, | (f) $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$, |
| (g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$, | (h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$, |
| (i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$, | (j) $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$, |
| (k) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$, | (l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$. |

2.3. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x , y és z változókat; a , b , c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$,
- (b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$,
- (c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$,
- (d) $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

2.4. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „ x hallgató”, $V(x)$: „ x felkészült a vizsgára”, $B(x, y)$: „ x az y barátja”,
 $C(x, y)$: „ x csoporttársa y -nak”, $T(x, y)$: „ x házastársa y -nak”, $F(x)$: „ x férfi”,
 $A(x)$: „ x anya”, p : „Péter”, $a(x)$: „ x anyja”,
 $S(x)$: „ x szeret főzni”.

- (a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
- (b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
- (c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
- (d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
- (e) *Vannak nőtlen férfiak.*
- (f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
- (g) *Péter összes barátja hallgató.*
- (h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
- (i) *Péter anyja szeret főzni.*

2.5. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
- (b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
- (c) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*
- (d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
- (e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

2.6. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) *Minden informatikus éhes.*
- (b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
- (c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
- (d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
- (e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
- (f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
- (g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*