
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

1. FELADATSOR

AZ ÍTÉLETKALKULUS ELEMEI

MBNXK111

1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat az

A : „Süt a nap.”, B : „Kimegyek az uszodába.”, C : „Hamburgert ebédelek.”

prímítéletek felhasználásával:

- (a) *Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.*
- (b) *Nem süt a nap.*
- (c) *Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.*
- (d) *Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.*
- (e) *Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.*

1.2. Feladat. Adjuk meg az

$$F = (A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$$

formula összes részformuláját.

1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

- (a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$,
- (b) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$,
- (c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$
- (d) $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

formulák közül — a prímítéletek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.

1.4. Feladat. A prímítéletek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

- (a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
- (b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
- (c) *Ha esik az eső, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
- (d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
- (e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánval, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
- (f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld vagy az asztal lekváros lesz.*
- (g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*

- (h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
- (i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
- (j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*
- (k) *Ha még egy *** mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök, és utána tépem ki a hajamat.*

1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A prímítéletek mindig „pozitívak” legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \dots$ betűkkel.)

- (a) *Ha nem fáj a lábam, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön. ($A: h, B: h, C: i, D: h$)*
- (b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerezés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára. ($A: i, B: h, C: i, D: h, E: i$)*
- (c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot. ($A: i, B: i, C: i, D: h, E: h$)*

1.6. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C),$
- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A,$
- (c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C,$
- (d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B),$
- (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A,$
- (f) $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A)).$

1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

- (a) (1) *Ha nem tanulsz, vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*
- (b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*
- (c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik, vagy Aladár nem kezd el szivarozni, vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg, és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

1.8. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

- (a) $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg A))),$
- (b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B),$

- (c) $A \rightarrow (A \wedge B)$, (d) $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$
 (e) $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$ (f) $(B \vee (\neg A)) \rightarrow (B \vee (\neg A))$,
 (g) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge A)$.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$$\begin{aligned} F_1 &= (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B)), & F_2 &= (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C), \\ F_3 &= (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)), & F_4 &= (\neg A) \wedge B \wedge C. \end{aligned}$$

1.10. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

- (a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$, (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C$,
 (c) $(A \vee B) \rightarrow (\neg(C \rightarrow B))$, (d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B)$,
 (e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B))$, (f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge (((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B)$.