

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$ és a $\beta^{-1}\alpha$ leképezéseket, ahol

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 2^{x+1}, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\beta = 3x.$$

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS. $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(\alpha\beta) = 3 \cdot 2^{x+1}$
 $\beta^{-1}\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(\beta^{-1}\alpha) = 2^{\frac{x}{3}+1}$

2. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az α leképezés injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e. **Válaszát indokolja!**

$$\alpha: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Nem injektív, például $(1, 4)\alpha = 4$ és $(2, 2)\alpha = 4$.

Szürjektív, bármely $z \in \mathbb{Z}$ esetén $(1, z)\alpha = z$, tehát minden $\mathbb{Z}$ -beli elemnek van őse.

Nem bijektív, mert nem injektív. (1 pont)

3. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

(a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}.$

(b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z};$

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ végtelen halmaz, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, és $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, így $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}| = \aleph_0$. Mivel $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, a Számosságáritmetika Alaptételéből $|\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.

(b) $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ és $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, így a Számosságáritmetika Alaptételéből következik, hogy $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$. Továbbá $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.

4. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban.

$$\frac{\overline{(2 + i)}(1 + 3i)}{3 + 2i}.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\frac{25}{13} + \frac{5}{13}i.$

5. Feladat. Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok körében kanonikus alakkal számolva.

$$z^2 = -9 + 12i.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $z_1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i.$

6. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
 (b) Adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.
 (b) $-\sqrt{3} - i$.

7. Feladat. Végezze el az alábbi hatványozást a komplex számok körében. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-14}.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Hatványozás eredménye: $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$.

8. Feladat. Határozza meg a -3 komplex szám harmadik gyökeit trigonometrikus és kanonikus alakban. (6 pont)

MEGOLDÁS. A három gyök:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3}(\cos \pi + i \sin \pi) &= -\sqrt[3]{3}, \\ \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i, \\ \sqrt[3]{3}\left(\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) &= \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

9. Feladat. Határozza meg a következő polinom **komplex gyökeit**, és adja meg a **gyöktényezős felbontását**.

$$x^5 - 3x^3 - 10x.$$

(5 + 1 pont)

MEGOLDÁS. Gyökei: $0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$,
 gyöktényezős felbontása: $x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$.

10. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az AB és az $(A^T + B)C$ mátrixot.

(2 + 4 pont)

MEGOLDÁS. $AB = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $(A^T + B)C = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Feladat. Határozza meg az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét.

(6 pont)

MEGOLDÁS. -25

12. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & x \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $x = 1$.

13. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix sajátértékeit.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $-2, 4, 5$.

14. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 9 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Feladat.

(a) Oldja meg Gauss-elimináció felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned}$$

(b) Egy lineáris egyenletrendszer megoldása során a következő mátrixhoz jutottunk. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Adja meg az egyenletrendszer általános megoldását is.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

(3+3 pont)

MEGOLDÁS.

(a) Nincs megoldás.

(b) Végtelen sok megoldás van, x_4 szabad ismeretlen. Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$\{(2x_4 + 5, x_4 - 2, -2x_4 + 3, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

16. Feladat. Döntse el, hogy a $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (-3, -8, 9)$ vektorrendszer lineárisan független-e, illetve generátorrendszer-e, bázis-e $\mathbb{R}^3$ -ben. **Válaszait indokolja!** (6 pont)

MEGOLDÁS. Gauss-eliminációval igazolható, hogy nem lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

17. Feladat. Határozza meg a $v = (3, -7, -2)$ vektor koordinátasorát a $(-1, -2, 2)$, $(1, -2, -3)$, $(2, 3, 3)$ bázisban. (6 pont)

MEGOLDÁS. A koordinátasor: $(2, 3, 1)$.

18. Feladat. Adjon meg bázist az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Például egy bázis: $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$.