

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$ és a $\beta^{-1}\alpha$ leképezéseket, ahol

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 2^{x+1}, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\beta = 3x.$$

(3 + 3 pont)

2. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az α leképezés injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e. **Válaszát indokolja!**

$$\alpha: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

(6 pont)

3. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

- (a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.
(b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$;

(3 + 3 pont)

4. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban.

$$\frac{\overline{(2+i)}(1+3i)}{3+2i}.$$

(6 pont)

5. Feladat. Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok körében kanonikus alakkal számolva.

$$z^2 = -9 + 12i.$$

(6 pont)

6. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
(b) Adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.

(3 + 3 pont)

7. Feladat. Végezze el az alábbi hatványozást a komplex számok körében. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-14}.$$

(6 pont)

8. Feladat. Határozza meg a -3 komplex szám harmadik gyökeit trigonometrikus és kanonikus alakban. (6 pont)

9. Feladat. Határozza meg a következő polinom **komplex gyökeit**, és adja meg a **gyöktényezőző felbontását**.

$$x^5 - 3x^3 - 10x.$$

(5 + 1 pont)

10. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az AB és az $(A^T + B)C$ mátrixot.

(2 + 4 pont)

11. Feladat. Határozza meg az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét.

(6 pont)

12. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & x \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

(6 pont)

13. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix sajátértékeit.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

14. Feladat. Adja meg a következő valós mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6 pont)

15. Feladat.

(a) Oldja meg Gauss-elimináció felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned}$$

(b) Egy lineáris egyenletrendszer megoldása során a következő mátrixhoz jutottunk. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Adja meg az egyenletrendszer általános megoldását is.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

(3 + 3 pont)

16. Feladat. Döntse el, hogy a $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (-3, -8, 9)$ vektorrendszer lineárisan független-e, illetve generátorrendszer-e, bázis-e $\mathbb{R}^3$ -ben. **Válaszeit indokolja!**

(6 pont)

17. Feladat. Határozza meg a $v = (3, -7, -2)$ vektor koordinátasorát a $(-1, -2, 2)$, $(1, -2, -3)$, $(2, 3, 3)$ bázisban.

(6 pont)

18. Feladat. Adjon meg bázist az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(6 pont)