

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. A primitéletelek alkalmas megválasztásával **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet. Határozza meg a formula **logikai értékét**, ha a formulában szereplő összes változó logikai értékét igaznak választja.

Pontosan akkor nem kell sokat várni az orvosnál, és gyorsan végzünk, ha időben jöttünk vagy kevesen vannak.

(4 + 2 pont)

MEGOLDÁS.

A: *Sokat kell várni az orvosnál.*

B: *Gyorsan végzünk.*

C: *Időben jöttünk.*

D: *Kevesen vannak.*

Formula: $(\neg A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee D)$, ha minden változó logikai értéke igaz, akkor a formula hamis.

2. Feladat. A primitéletelek alkalmas megválasztásával **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket, és döntse el, hogy **logikailag ekvivalensek-e a kapott formulák**.

(1) *Ha nem esik az eső, elmegyek futni, valamint csak akkor eszek fagyit, ha elmegyek futni.*

(2) *Ha nem esik az eső vagy fagyit eszek, akkor elmegyek futni.*

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

(1): $(\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

(2): $(\neg A \vee B) \rightarrow C$

(1) $\equiv$ (2) (igazságtáblázat)

3. Feladat. Döntse el, hogy az F és G ítéletkalkulusbeli formulák **logikailag ekvivalensek-e**. Vizsgálja meg, hogy **tautológia-e** az F formula. **Válaszeit indokolja!**

$F \equiv (A \vee B) \wedge (C \rightarrow B), \quad G \equiv B \vee (\neg(A \rightarrow C)).$

(4 + 2 pont)

MEGOLDÁS. Ekvivalensek (igazságtáblázat), F nem tautológia, például ha $A : i, B : h, C : i$, akkor hamis.

4. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes diszjunktív normálformáját:

$$((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg C).$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. TDNF: $(A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)).$

5. Feladat. Az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $A(x)$ az „x igazat mond”, $B(x, y)$ az „x barátja y-nak” predikátumokat, c pedig a „Károly” individuumkonstanst. **Fordítsa köznap nyelvre** az alábbi formulát. Adja meg a **formula tagadását** is úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))).$$

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS. Van, aki igazat mond, és Károlynak nem a barátja.

$\neg(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)\neg(A(x) \wedge (\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)((\neg A(x)) \vee \neg(\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)((\neg A(x)) \vee B(x, c)) \equiv (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x, c))$. (Megjegyzés: már az utolsó előtti lépés is eleget tesz a feladatban megfogalmazott feltételnek.)

6. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$h(1) = 1, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 4, \quad h(4) = 5, \quad h(5) = 5, \quad h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak. **Válaszeit indokolja!**

- (1) $(\exists x)(N(x) \wedge R(h(x), x))$,
- (2) $(\forall x)(\exists y)(N(x) \rightarrow E(h(y), x))$.

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (1) Igaz, $x = 4$ teljesíti, mert a 4 négyzetszám, és $h(4) = 5$, tehát $h(4) - 4 = 1$.
- (2) Igaz, az implikáció pontosan akkor lenne hamis, ha az előtag igaz, az utótag hamis, tehát négyzetszámokat kell venni A -ból, ami az 1 és 4, de $h(1) = 1$ és $h(3) = 4$, tehát az utótag is igaz.

7. Feladat. Formalizálja predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak. Továbbá **adja meg szövegesen az ítélet tagadását** úgy, hogy a „nem minden” ne szerepeljen benne.

$$\begin{aligned} I(x) : & \text{„}x \text{ informatikus”}, & Sz(x, y) : & \text{„}x \text{ szomszédja } y\text{-nak”}, \\ R(x) : & \text{„}x \text{ szeret röplabdázni”}, & v : & \text{„}Viki\text{”}. \end{aligned}$$

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

(4 + 2 pont)

MEGOLDÁS. $(\forall x)((I(x) \wedge Sz(x, v)) \rightarrow R(x))$

Tagadás: *Vikinek van olyan informatikus szomszédja, aki nem szeret röplabdázni.*

8. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintse a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit.

- (a) $\bar{A} \setminus B$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

(2 + 2 + 2 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\bar{A} \setminus B = \{7, 8\}$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B = \{1, 5\}$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$.

9. Feladat. Adjon meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 5 osztálya van,
- (b) minden osztálya legalább 3 elemű,
- (c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

(2 + 2 + 2 pont)

MEGOLDÁS. Több megfelelő osztályozás létezik.

- (a) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\},$
- (b) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\},$
- (c) $\{\{a, b, c, d, e, f, g, h\}\}.$

10. Feladat. Döntse el, hogy tetszőleges A, B, C halmazok esetén egyenlők-e az

$$(A \cup C) \cap B$$

halmazzal az alábbiak. **Válaszait indokolja!**

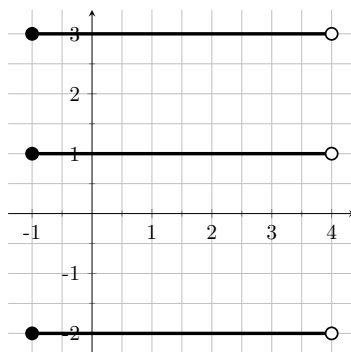
- (1) $(B \cap (A \Delta C)) \cup (A \cap B \cap C),$
- (2) $B \setminus (A \cup C).$

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS. (1) igen, (2) nem, Venn diagrammal igazolható.

11. Feladat.

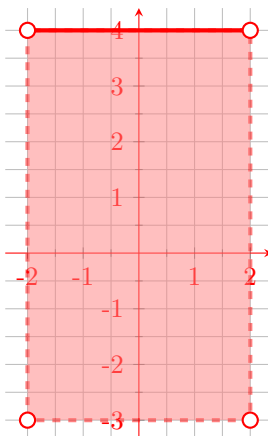
- (a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = [-3; 4]$. Ábrázolja Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.
- (b) Adja meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.



(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (a)



- (b) $A = [-1; 4), B = [-2, 1, 3].$

12. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A -n. Határozza meg a következő relációkat.

- (a) $\alpha \setminus \beta$,
- (b) β^{-1} ,
- (c) $\alpha^{-1}\beta$.

(2 + 1 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\alpha \setminus \beta = \{(2, 1), (4, 2), (5, 3)\}$,
- (b) $\beta^{-1} = \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
- (c) $\alpha^{-1}\beta = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 1), (1, 1), (3, 1)\}$.

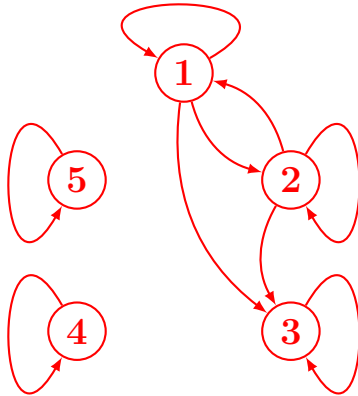
13. Feladat. Adjon meg a **gráfjával** egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket. **Indokolja is!**

- (a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
- (b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Például az α reláció lehet a következő gráffal megadott.

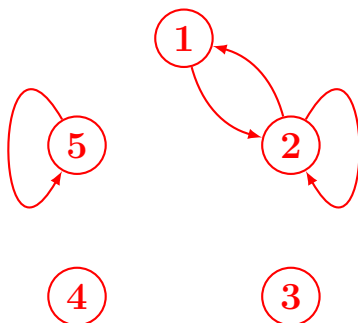


Az α reláció reflexív, mivel minden pontban van hurokél.

Tranzitív, mert tetszőleges pontok esetén, ha egyik pontból a másikba irányított élek mentén eljutunk, akkor egy élen is el tudunk jutni.

Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $1 \neq 2$.

- (b) Például a β reláció lehet a következő gráffal megadott.



A β nem reflexív, pl. $(1, 1) \notin \beta$.

Szimmetrikus, mert ha két pont között vezet egyik irányba él, akkor az ellentétes irányba is, és természetesen ez a hurokél esetén is igaz.

Nem dichotom, mert pl. $(1, 3) \notin \beta$ és $(3, 1) \notin \beta$. (Megj.: az hogy nem dichotom, abból is következik, hogy nem reflexív.)

14. Feladat. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok. **Válaszait indokolja!**

- (a) Az $\alpha = \{(a, b) : |a - b| > 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon reflexív-e, szimmetrikus-e?
- (b) A $\beta = \{(x, y) : xy = 1\}$ a $\{-1, 1, 2, 4, 7, 10\}$ halmazon antiszimmetrikus-e, dichotom-e?
- (c) A $\gamma = \{(x, y) : x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon tranzitív-e, dichotom-e?

(2 + 2 + 2 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Az α nem reflexív, mert pl. $|1 - 1| = 0 \not> 0$, így $(1, 1) \notin \alpha$. Az α szimmetrikus, mert $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$, így ha $(a, b) \in \alpha$, akkor $(b, a) \in \alpha$ is teljesül.
- (b) A $\beta = \{(1, 1), (-1, -1)\}$, így antiszimmetrikus, mert nincs $a \neq b$, amelyre $(a, b) \in \beta$. A β nem dichotom, pl. $(1, 2) \notin \beta$ és $(2, 1) \notin \beta$.
- (c) A γ tranzitív, mert tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$. Nem dichotom, mert nem reflexív, sőt $x \not< x$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

15. Feladat. Adjon meg olyan **osztályozást** az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó **ekvivalenciarelációt** az elemeinek felsorolásával. (3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

Egy ilyen osztályozás például: $A/\rho = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$.
A hozzá tartozó ekvivalenciareláció: $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$.

16. Feladat. Adja meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\alpha = \{(a, b) : a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ halmazon,
- (b) $\beta = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ négyvel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ az $A = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$ halmazon.

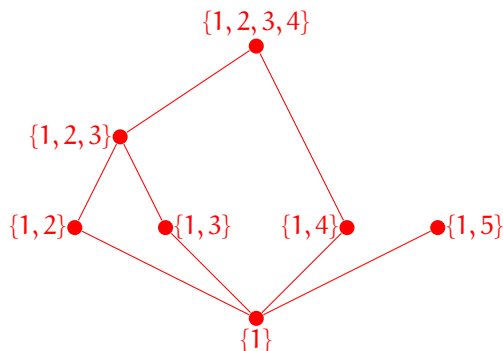
(3 + 3 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\{\{1\}, \{2, 23, 26, 32\}, \{4, 47, 84\}\}$.
- (b) $\{\{0, 16, 24\}, \{1, 5\}, \{3, 11, 15\}\}$.

17. Feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adja meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagramját**! Döntse el, hogy melyek a **minimális**, **maximális**, **legkisebb**, **legnagyobb elemek**. (2 + 1 + 1 + 1 + 1 pont)

MEGOLDÁS.



Minimális elem: $\{1\}$,
 maximális elemek: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5\}$,
 legkisebb elem: $\{1\}$,
 legnagyobb elem: nincs.