

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. A primitéletek alkalmas megválasztásával **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet. Határozza meg a formula **logikai értékét**, ha a formulában szereplő összes változó logikai értékét igaznak választja.

Pontosan akkor nem kell sokat várni az orvosnál, és gyorsan végzünk, ha időben jöttünk vagy kevesen vannak.

(4 + 2 pont)

2. Feladat. A primitéletek alkalmas megválasztásával **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket, és döntse el, hogy **logikailag ekvivalensek-e a kapott formulák**.

(1) *Ha nem esik az eső, elmegyek futni, valamint csak akkor eszek fagyit, ha elmegyek futni.*

(2) *Ha nem esik az eső vagy fagyit eszek, akkor elmegyek futni.*

(3 + 3 pont)

3. Feladat. Döntse el, hogy az F és G ítéletkalkulusbeli formulák **logikailag ekvivalensek-e**. Vizsgálja meg, hogy **tautológia-e** az F formula. **Válaszeit indokolja!**

$$F \equiv (A \vee B) \wedge (C \rightarrow B), \quad G \equiv B \vee (\neg(A \rightarrow C)).$$

(4 + 2 pont)

4. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes diszjunktív normálformáját:

$$((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg C).$$

(6 pont)

5. Feladat. Az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $A(x)$ az „ x igazat mond”, $B(x, y)$ az „ x barátja y -nak” predikátumokat, c pedig a „*Károly*” individuumkonstanst. **Fordítsa köznapi nyelvre** az alábbi formulát. Adja meg a **formula tagadását** is úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))).$$

(3 + 3 pont)

6. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$h(1) = 1, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 4, \quad h(4) = 5, \quad h(5) = 5, \quad h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak. **Válaszeit indokolja!**

$$(1) (\exists x)(N(x) \wedge R(h(x), x)),$$

$$(2) (\forall x)(\exists y)(N(x) \rightarrow E(h(y), x)).$$

(3 + 3 pont)

7. Feladat. **Formalizálja predikátumkalkulusban** az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstanst az alábbiak. Továbbá **adja meg szövegesen az ítélet tagadását** úgy, hogy a „nem minden” ne szerepeljen benne.

$$\begin{aligned} I(x): & \text{„}x \text{ informatikus”}, & Sz(x, y): & \text{„}x \text{ szomszédja } y\text{-nak”}, \\ R(x): & \text{„}x \text{ szeret röplabdázni”}, & v: & \text{„}Viki\text{”}. \end{aligned}$$

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

(4 + 2 pont)

8. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintse a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit.

- (a) $\overline{A} \setminus B$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

(2 + 2 + 2 pont)

9. Feladat. Adjon meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 5 osztálya van,
- (b) minden osztálya legalább 3 elemű,
- (c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

(2 + 2 + 2 pont)

10. Feladat. Döntse el, hogy tetszőleges A, B, C halmazok esetén egyenlők-e az

$$(A \cup C) \cap B$$

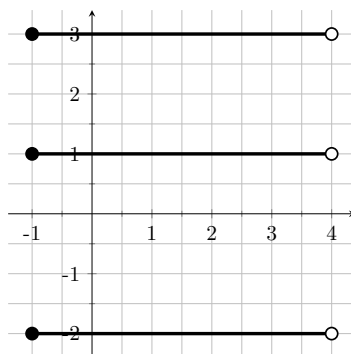
halmazzal az alábbiak. **Válaszait indokolja!**

- (1) $(B \cap (A \triangle C)) \cup (A \cap B \cap C)$,
- (2) $B \setminus (A \cup C)$.

(3 + 3 pont)

11. Feladat.

- (a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = (-3; 4]$. Ábrázolja Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.
- (b) Adja meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.



(3 + 3 pont)

12. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A -n. Határozza meg a következő relációkat.

- (a) $\alpha \setminus \beta$,
- (b) β^{-1} ,
- (c) $\alpha^{-1} \beta$.

(2 + 1 + 3 pont)

13. Feladat. Adjon meg a **gráfjával** egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket. **Indokolja is!**

- (a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
- (b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

(3 + 3 pont)

14. Feladat. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok. **Válaszait indokolja!**

- (a) Az $\alpha = \{(a, b) : |a - b| > 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon reflexív-e, szimmetrikus-e?
- (b) A $\beta = \{(x, y) : xy = 1\}$ a $\{-1, 1, 2, 4, 7, 10\}$ halmazon antiszimmetrikus-e, dichotom-e?
- (c) A $\gamma = \{(x, y) : x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon tranzitív-e, dichotom-e?

(2 + 2 + 2 pont)

15. Feladat. Adjon meg olyan **osztályozást** az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó **ekvivalenciarelációt** az elemeinek felsorolásával. (3 + 3 pont)

16. Feladat. Adja meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\alpha = \{(a, b) : a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ halmazon,
- (b) $\beta = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ négyvel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ az $A = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$ halmazon.

(3 + 3 pont)

17. Feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adja meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagramját!** Döntse el, hogy melyek a **minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek**. (2 + 1 + 1 + 1 + 1 pont)