4. feladatsor – Relációk

4.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \text{ és } \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

$$\alpha \cap \beta, \qquad \alpha \setminus \beta, \qquad \alpha^{-1}, \qquad \alpha\beta, \qquad \beta\alpha, \qquad \beta\alpha^{-1}, \qquad \beta \cap \alpha^{-1}.$$

4.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi α és β relációk esetén az α^{-1}, $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációkat. (Az $\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

- **(a)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon y \text{ az } x \text{ apja}\}$
- **(b)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2^y\}$
- **(c)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - 1 = 3x\}$

4.3. Feladat. Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(a, b) \colon a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

4.4. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

- **(a)** reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
- **(b)** antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
- **(c)** dichotom de nem reflexív.

4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

- **(a)** $\{(a, b) \colon |a - b| \leq 2\}$ a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
- **(b)** $\{(x, y) \colon x \leq y\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- **(c)** $\{(x, y) \colon x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
- **(d)** $\{(a, b) \colon ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
- **(e)** $\{(a, b) \colon a^2 \geq b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- **(f)** $\{(x, y) \colon |x| = |y|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
- **(g)** $\{(x, y) \colon 2 \mid x + y\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon
- **(h)** $\{(a, b) \colon 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- **(i)** $\{(a, b) \colon a^2 < b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- **(j)** $\{(X, Y) \colon X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon

4.6. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

4.7. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

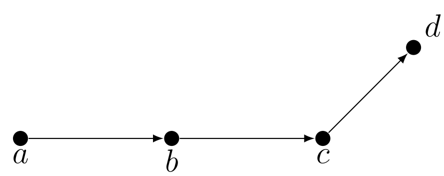
- **(a)** $\{(a, b) \colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
- **(b)** $\{(a, b) \colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon

(c) $\{(H,G)\colon |H|=|G|\}$ az $A=\{\emptyset,\{1,2\},\{\emptyset\},\{0\},\{a,b\},\{1,2,3\}\}$ halmazon
(d) $\{(x,y)\colon x$-nek és y-nak van közös prímosztója$\}$ az $A=\{2,3,8,9,14,15,19,26\}$ halmazon
(e) $\{(x,y)\colon x$ és y számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A=\{71,301,216,4,121,54,602,315\}$ halmazon
(f) $\{(a,b)\colon |a|=|b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(g) $\{(x,y)\colon x^2+y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

(a) $(A;\subseteq)$, ahol $A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$
(b) $(B;\subseteq)$, ahol $B=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
(c) $(C;|)$, ahol $C=\{2,3,4,5,6,12,24,36\}$
(d) $(D;|)$, ahol $D=\{0,1,2,4,7,14,28,32\}$
(e) $(E;\sqsubseteq)$, ahol $E=\{123,211,321,467,512,861,999\}$ és $a\sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye
(f) $(F;\leq)$, ahol $F=\{(1,1),(\frac{1}{2},2),(0,-1),(\frac{1}{3},3),(2,2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés

4.9. Feladat. Adjuk meg a következő gráf által meghatározott ρ reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, reflexív és tranzitív lezártját.



4.10. Feladat. Legyen $\rho=\{(a,b)\mid a-b=2\}$ reláció az $A=\{1,2,3,4,5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a ρ gráfját és adjuk meg (ne csak a gráfjával)

(a) ρ reflexív lezártját;
(b) ρ szimmetrikus lezártját;
(c) ρ tranzitív lezártját;
(d) ρ reflexív és tranzitív lezártját.

4.11. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

(a) $\{(a,b)\in A^2\colon |a-b|=2\}$, ahol $A=\{1,2,3,4,5\}$;
(b) $\{(a,b)\in \mathbb{Z}^2\colon a-b=0\}$;
(c) $\{(a,b)\in \mathbb{R}^2\colon b=a^2\}$;
(d) $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\colon y-x=1\}$.