3. feladatsor – Halmazok

3.1. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B, \quad (A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad \mathcal{P}(B).$$

3.2. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

3.3. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

(a) $\emptyset \in A$
(b) $\emptyset \subseteq A$
(c) $\{\emptyset\} \in A$
(d) $\{\emptyset\} \subseteq A$
(e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$
(f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$
(g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$
(h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$
(f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$

3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 3 osztálya van;
(b) pontosan 3 osztálya van;
(c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
(d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

3.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

(a) $A \subseteq B$ **(b)** $A = B$ **(c)** $B \setminus A = \emptyset$

3.10. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

(a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$;
(b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq (A \cap C \cap D)$.

3.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $A \times B$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

(a) $A = \{1, 3\},\ B = \{-1, 0, 2\}$
(b) $A = \{1, 3\},\ B = [1; 3)$
(c) $A = (-1; 2],\ B = [1; 3)$

3.12. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?