

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:
 - $M(x)$: „ x négyzetszám”,
 - $P(x)$: „ x páros szám”,
 - $N(x)$: „ x negatív szám”.
- kétváltozós predikátum:
 - $O(x, y)$: „ x osztója y -nak”,
- kétváltozós függvény(jel)ek
 - $o(a, b) = a + b$, azaz a és b szokásos összege
 - $s(a, b) = a \cdot b$, azaz a és b szokásos szorzata

Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

- (a) $P(7)$
- (b) $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$
- (c) $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$
- (d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$
- (e) $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$
- (f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$
- (g) $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y)))$
- (h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$
- (i) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))))$

2.2. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y) : x + y = 5; \quad Q(x) : x \text{ páros}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- (a) $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$,
- (b) $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$,
- (c) $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$,
- (d) $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$,
- (e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$,
- (f) $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$,
- (g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$

- (h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$
- (i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$
- (j) $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$,
- (k) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$,
- (l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

2.3. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat; a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$
- (b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$
- (c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$
- (d) $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

2.4. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „ x hallgató”, $V(x)$: „ x felkészült a vizsgára”,
 $B(x, y)$: „ x az y barátja”, $C(x, y)$: „ x csoporttársa y -nak”,
 $T(x, y)$: „ x házastársa y -nak”, $F(x)$: „ x férfi”,
 $A(x)$: „ x anya”, p : „Péter”,
 $a(x)$: „ x anyja”, $S(x)$: „ x szeret főzni”.

- (a) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
- (b) Minden hallgató felkészült a vizsgára.
- (c) Néhány hallgatónak nincs barátja.
- (d) Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.
- (e) Vannak nőtlen férfiak.
- (f) Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.
- (g) Péter összes barátja hallgató.
- (h) Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.
- (i) Péter anyja szeret főzni.

2.5. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.
- (b) Minden egész számnál létezik kisebb.
- (c) Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.
- (d) Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.
- (e) Minden szám pozitív vagy negatív.

2.6. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) *Minden informatikus éhes.*
- (b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
- (c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
- (d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
- (e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
- (f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
- (g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*