Halmazok

Kátai-Urbán Kamilla

3. előadás

Mi a halmaz?

A halmaz és a halmaz eleme alapfogalom, tehát nem definiáljuk, de körülírhatjuk, hogy mit tekinthetünk halmaznak. Halmazon elemek egyértelműen meghatározott összességét értjük. Fontos, hogy bármely x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig) objektíven meghatározható legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek. (Például az I. éves szorgalmas informatikus hallgatók összessége nem alkot halmazt, mert a szorgalom megítélése szubjektív.) Az, hogy a halmaz az elemek egyértelműen meghatározott összessége, arra vonatkozik, hogy mindenki pontosan ugyanazon x-eket tekintse az összesség elemeinek. Tehát az objektivitásra utal, és nem arra, hogy ténylegesen el tudjuk-e dönteni, hogy x eleme-e a halmaznak.

Halmaz megadása

Jelölés.

Az $x \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy x eleme A-nak. A halmazt többnyire a $\{,\}$ zárójelek között az elemek felsorolásának segítségével adjuk meg, de megadhatjuk ún. általános elem és definiáló tulajdonságok segítségével is.

Példa.

- $\{2, 3, 5, 7\} = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ egyjegyű prímszám}\}$.
- $\{2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$.
- $\{x \in \mathbb{N} \colon \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 3y\} = \{x \in \mathbb{N} \colon 3 \text{ osztója } x\text{-nek}\}$.
- $\{(x, y) \mid x \text{ és } y \text{ valós szám és } x^2 + y^2 < 1\}$, az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

Definíció.

Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \ \leftrightarrow \ x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy $A = B$. Halmaz esetén minden elem csak egyszer számít, tehát például $\{1, 2, 3, 1, 2, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Definíció.

Ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \ \rightarrow \ x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B-nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz **valódi részhalmaza** B-nek, amelyet $A \subset B$-vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Definíció.

Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük (jel.: $\emptyset$). Azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül az üreshalmazra.

Tétel.

Tetszőleges A, B, C halmazokra

(a) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$,

(b) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (ún. tranzitivitás),

(c) $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ (ún. antiszimmetria).

Megjegyzés.

Bármely A halmaz esetén az A-t és az $\emptyset$-t az A halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

A (c) rész (antiszimmetria) gyakran hasznos annak igazolására, hogy két halmaz egyenlő.

Példa.

Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1,\ (3 - 1)\}$, $C = \{1, 1, 2\}$, $D = \{\emptyset, 1, 2\}$, $E = \{\{1\}, 2\}$, $F = \{\{1, 2\}\}$.

- $A = B = C$, a többi páronként különböző.
- Elemek száma: a D halmaznak három, F-nek egy eleme van, a többinek kettő.
- Az $\{1\}$ halmaz részhalmaza az A, B, C és D-nek, de E és F-nek nem.
- Az $\{1\}$ halmaz eleme az E-nek, a többinek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz részhalmaza az A, B, C és D-nek, de E és F-nek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz eleme az F-nek, a többinek nem.
- Az $\emptyset$ részhalmaza minden halmaznak (ld. előző tétel (a) része).
- Az $\emptyset$ eleme a D halmaznak (abban van felsorolva elemként), a többinek nem.

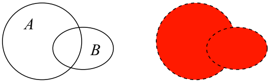
Definíció.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket (unió)** és **metszetüket**:

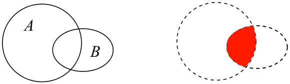
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B **diszjunktak**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Szokás a halmazokat síkbeli tartományokkal, azaz ún. **Venn-diagramokkal** szemléltetni. A Venn-diagram nem mindig szemlélteti az általánosságot, tehát Venn-diagramokkal egzakt bizonyítás nem adható általában.



$A \cup B$



$A \cap B$.

Definíció.

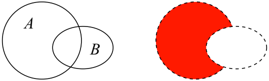
Legyen rögzítve egy U (halmaz az) **univerzum (alaphalmaz)**. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A halmaz komplementerét:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

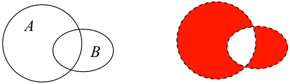
Definíció.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}, \qquad A \triangle B = \{x \mid x \in A \ \leftrightarrow \ x \notin B\}.$$



$A \setminus B.$



$A \triangle B$

Halmazműveletekkel kapcsolatos azonoságok

Tétel.

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A \text{ (kommutativitás);}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \text{ (asszociativitás);}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) \text{ (disztributivitás);}$$

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A \text{ (abszorptivitás).}$$

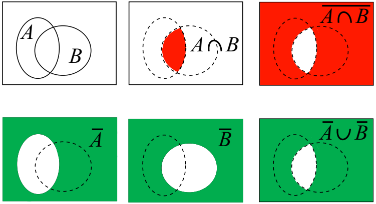
A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel.

Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra érvényesek:

$$
\begin{aligned}
&& \overline{\overline{A}} &= A, \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{(De Morgan azonosságok)} \\
A \cap \overline{A} &= \emptyset, & A \cup \overline{A} &= U, \\
A \cap U &= A, & A \cup U &= U, \\
A \cap \emptyset &= \emptyset, & A \cup \emptyset &= A, \\
A \setminus B &= A \cap \overline{B} & A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).
\end{aligned}
$$

Az $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ De Morgan azonosság Venn-diagrammal ábrázolva.



$\overline{A \cap B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$

Akárhány halmaz metszete és uniója

Definíció.

Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Példa.

Mutassuk meg, hogy a metszet disztributív a szimmetrikus differenciára

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

A megoldást többféle módszerrel is megadjuk.

1. megoldás: táblázat segítségével.

Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok, vezessük be az $L := A \cap (B \triangle C)$ és az $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ jelölést. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges x-re $x \in L$ pontosan akkor teljesül, amikor $x \in R$. Különböztessünk meg összesen nyolc esetet annak megfelelően, hogy az A, B, C halmazok közül az x melyiknek eleme. Az következő táblázatban az $\in$, illetve $\notin$ úgy értendő, hogy x eleme, illetve nem eleme az oszlopfejlécként írt halmaznak. A következő dián található táblázat kitöltése után látható, hogy $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Tehát $L = R$.

Példa (folyt.)

$L := A \cap (B \triangle C)$, $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

A	B	C	$B \triangle C$	L	$A \cap B$	$A \cap C$	R
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

Megjegyzés.

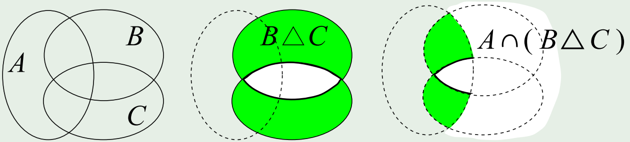
Ez a táblázat nagyon emlékeztet az ítéletkalkulusnál látott igazságtáblázatokra. Ez nem véletlen, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Példa (folyt.)

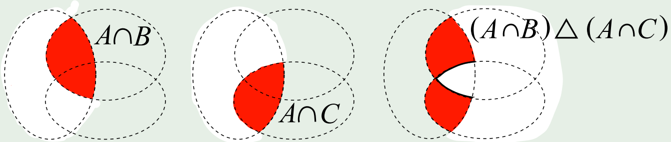
2. megoldás: Venn-diagram segítségével.

Korábban említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most, ha olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat veszünk fel az ábrán, hogy az előző nyolc eset mindegyike fellépjen, akkor az előző bizonyítást ismételhetjük meg szemléletes formában. (Több halmaz esetén a Venn-diagramot nehéz felrajzolni.)

$L := A \cap (B \triangle C)$:



$R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$:



Descartes-szorzat, Hatványhalmaz, Osztályozás

Rendezett elempár

Definíció.

Tetszőleges a és b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a az első és b a második komponense. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $(a, b) = (c, d)$ pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

Megjegyzés.

A komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben a halmazok esetén a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Descartes-szorzat

Definíció.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}.$$

Azonos tényzők szorzatát hatványként is jelölhetjük: $A \times A = A^2$.

Példa.

- Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata

  $$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

  hatelemű halmaz.
- Az $\emptyset \times B = \emptyset$, mert ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor abból $a \in \emptyset$ következne, ami nem lehetséges.

Definíció.

Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A halmaz **hatványhalmazának** nevezzük és $P(A)$-val jelöljük, azaz $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Példa.

- Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

  $$P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

  8-elemű.
- Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan 1-elemű halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz.
- Mivel a $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ halmaznak az üreshalmaz és önmaga a két részhalmaza, így $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Osztályozás

Definíció.

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

(1) bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,

(2) bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$,

(3) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Példa.

Melyek osztályozások az adott A halmazon az alábbiak közül?

(a) $\mathcal{C} = \{X \subseteq \{0, 1, \dots, 9\} : |X| = 3\}, \;\; A = \{0, 1, \dots, 9\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}, \;\; A = \{1, 2, \dots, 5\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}, \;\; A = \{0, 1, \dots, 5\}$.

(a) Nem, a részhalmazok nem diszjunktak.

(b) Igen.

(c) Nem, mert a részhalmazok nem fedik le A-t.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és keressük meg A összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani egyetlen 3-elemű osztályra $(3 = 3)$, vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra $(3 = 2 + 1)$, vagy három egyelemű osztályra $(3 = 1 + 1 + 1)$. Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A-nak:

$$\{\{1, 2, 3\}\},$$

$$\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Predikátumkalkulus, Halmazok elektronikus teszt (2. fel.)

Az elektronikus tesztek a http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/ oldalon érhetők el. Az első elektronikus teszt már kitölthető. A második elektronikus teszt a hét végén indul.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges U halmazra és tetszőleges (nem feltétlen különböző) $a, b \in U$ elemekre (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- $|\{(a, b)\}| = 2$. **Hamis**, csak egy eleme van (a, b).
- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \cup \emptyset$. **Igaz**.
- $\{a, b\} \in \{a, b\}$. **Hamis**, $a, b \in \{a, b\}$, de az $\{a, b\}$ nem eleme, hanem részhalmaza önmagának.