Predikátumkalkulus, Teljes indukció

Kátai-Urbán Kamilla

2. előadás

A Diszkrét matematika I. előadások diáinál felhasznált irodalom

- Czédli Gábor: Diszkrét matematika I. – előadásfóliák (2005-2019)
- Maróti Miklós: Diszkrét matematika – előadásvázlat
- Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika – Polygon jegyzet

A predikátumkalkulus elemei

Példa.

Minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál.

Az ítéletkalkulus nem elegendő bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, ezért az ítéletkalkulust ki kell bővíteni.

- Kvantorok:
  - **univerzális kvantor**: „bármely, minden, összes, tetszőleges”, jele: $\forall$
  - **egzisztenciális kvantor**: „van olyan, létezik, található”, jele: $\exists$
- **Függvényjelek**, például a „négyzetgyök”.
- **Predikátumjelek**, például a „nagyobb”.

Definíció.

Predikátumnak nevezzük az olyan kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk.

Példa.

Formalizáljuk a következő ítéletet:

Minden páros szám osztható 2*-vel.*

A következő predikátumjeleket vezetjük be:

- $P(x)$: x páros szám.
- $O(x, y)$: x osztója y-nak.

A keresett formula:

$$(\forall x)(P(x) \to O(2, x))$$

A kvantorokat zárójelbe kell tenni, és a hatókörét is zárójel jelöli. Ha a kvantor után nincs zárójel, akkor az utána lévő legrövidebb formulára vonatkozik.

Definíció.

A predikátum változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. Az individuumtartomány egy elemét **individuumkonstansnak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

Példa.

A korábbi példában megadott $(\forall x)(P(x) \to O(2, x))$ formulában az x individuumváltozó. Az individuumtartomány, azaz az alaphalmaz, az egész számok halmaza. A 2 individuumkonstans.

Definíció.

Függvénynek nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve szintén az individuumtartomány elemét kapjuk. Az **individuumkonstansok** 0-változós függvényeknek tekinthetők. A függvényeket kis betűkkel jelöljük.

Példa.

Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza, és vezessük be a következő predikátumjeleket és függvényjelet:

- $O(x, y)$: x osztója y-nak.
- $E(x, y)$: x egyenlő y-nal.
- $f(x, y)$: x és y szorzata.

Döntsük el, hogy igaz-e az alábbi állítás:

$$(\forall x)(\forall y)(E(f(x, 2), y) \to O(x, y)).$$

Az állítás igaz, mivel minden x, y egész számra teljesül az oszthatóság definíciója miatt a következő: ha $x \cdot 2 = y$, akkor x osztója y-nak.

Definíció.

Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. Ekkor a predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **kifejezései** a következők:

(k_1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés,

(k_2) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezés, és

(k_3) minden kifejezés (k_1) és (k_2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

Példa.

Az előző példában szereplő formula részkifejezései az x, y individuumváltozók, és a 2, illetve $f(x, 2)$ függvények, melyek 0- illetve 2-változósak.

Definíció.

Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ (nemüres) halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. A predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **formulái** a következők:

(p_1) ha $t_1, \ldots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \ldots, t_n)$ **prímformula vagy atomi formula**,

(p_2) ha F és G formulák, valamint x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike **összetett formula**, és

(p_3) minden formula (p_1) és (p_2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

Példa.

A korábbi formulában prímformulák az $E(f(x,2),y)$ és az O(x,y), összetett formulák például az $(E(f(x,2),y) \to O(x,y))$, és a $(\forall y)(E(f(x,2),y) \to O(x,y))$.

Definíció.

A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F-et a **kvantor hatókörének** hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F-beli előfordulásait **kötöttnek** nevezzük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy **formula szabad változói** alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

Példa.

Legyen $\mathcal{P} = \{P(x, y)\}$ és $\mathcal{F} = \{f(x)\}$. Tekintsük a következő formulában a kvantorok hatókörét:

$$\underbrace{(\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{\big((\forall z)\ \underbrace{P(f(x), z)}_{\forall z \text{ hatóköre}} \ \wedge\ P(f(z), y)\big)}_{\forall y \text{ hatóköre}}}_{\exists x \text{ hatóköre}}}$$

Példa.

Tehát a $(\exists x)(\forall y)\big((\forall z)P(f(x), z) \wedge P(f(z), y)\big)$ formulában az x és az y változók kötötten fordulnak elő, a z változónak pedig van kötött és szabad előfordulása is, tehát a formula nem zárt. A z változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mintha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\exists x)(\forall y)\big((\forall t)P(f(x), t) \wedge P(f(z), y)\big).$$

Megjegyzés.

Ha a lerögzített predikátumjeleknek és függvényjeleknek megadjuk egy jelentését, azt **interpretációnak** nevezzük.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk, hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját, az F és G formulák logikai értéke a szabad változók tetszőleges behelyettesítése mellett megegyezik. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

Tétel.

Legyen F tetszőleges formula, ekkor érvényesek a következő logikai ekvivalenciák.

$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F, \quad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F.$$

Példa.

Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, és formalizáljuk a következő mondatot:

Mindenki szereti az anyja főztjét.

- $S(x, y)$: x szereti y főztjét, (2-változós predikátumjel)
- $a(x)$: x anyja. (1-változós függvényjel!)

$$(\forall x)S(x, a(x)).$$

Tagadjuk a formulát: $\neg(\forall x)S(x, a(x)) \equiv (\exists x)\neg S(x, a(x))$.

Van olyan, aki nem szereti az anyja főztjét.

Tétel.

Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

Példa.

Az ítéletkalkulusbeli ekvivalencia legyen: $A \to B \equiv \neg A \vee B$. Ha A-t $(P(x,y) \vee Q(x))$-szel B-t pedig $R(x)$-szel helyettesítjük, akkor a $(P(x,y) \vee Q(x)) \to R(x) \equiv \neg(P(x,y) \vee Q(x)) \vee R(x)$ ekvivalenciát kapjuk.

Tétel.

Ha egy formula részformuláját egy vele logikailag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Példa.

$$(\forall x)(\exists y)\big((P(x,y) \vee Q(x)) \to R(x)\big) \equiv (\forall x)(\exists y)\big(\neg(P(x,y) \vee Q(x)) \vee R(x)\big).$$

Példa.

Korábban formalizáltuk a

Minden páros szám osztható 2*-vel.*

ítéletet, a kapott formula: $(\forall x)(P(x) \to O(2,x))$.
Az előző tételek felhasználásával megadjuk a formula **tagadását** úgy, hogy negáció legfeljebb csak prímformulára vonatkozzon.

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x)(P(x) \to O(2,x)) \equiv (\exists x)\neg(P(x) \to O(2,x)) \equiv \\
\equiv&(\exists x)\neg(\neg P(x) \vee O(2,x)) \equiv (\exists x)(\neg(\neg P(x)) \wedge \neg O(2,x)) \equiv \\
\equiv&(\exists x)(P(x) \wedge \neg O(2,x)).
\end{aligned}$$

A második lépésben az $A \to B \equiv \neg A \vee B$ azonoságot használtuk, az utolsó előtti lépésben pedig a $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ De Morgan azonosságot alkalmaztuk.
Tehát az eredeti mondat tagadása:

Van olyan páros szám, amely nem osztható 2*-vel.*

Megjegyzés.

Az ítéletkalkulussal ellentétben predikátumkalkulusban nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

A matematikai logika arra jó például, hogy.

- segíti az egyértelmű fogalmazást,
- megkönnyíti az állítások tagadását,
- segít, hogy helyes következtetéseket vonjunk le,
- kapcsolódik a programozáshoz.

Predikátumkalkulus, Halmazok elektronikus teszt (1. fel.)

Az elektronikus tesztek a https://www.math.u-szeged.hu/∼mmaroti/tests/ oldalon érhetők el. Az első elektronikus teszt a második hét végén indul, regisztrálni már lehet. További részletek az előadó honlapján.

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen g az az 1-változós függvényjel A-n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$
- $(\forall x)(\exists y)E(x, g(y))$
- $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \to (P(g(x)) \land P(g(y))))$

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen g az az 1-változós függvényjel A-n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ igaz, például $x = 1$ és $y = 3$, vagy $x = y = 2$.
- $(\forall x)(\exists y)E(x, g(y))$ hamis, a g-nél az 1 és a 4 sem áll elő képként.
- $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \to (P(g(x)) \wedge P(g(y))))$ igaz, ha $x = 4$-et választjuk, akkor $R(x, y)$ tetszőleges y esetén hamis, mivel az implikáció előtagja hamis, így az implikáció igaz, függetlenül attól, mi szerepel az utótagban.

Teljes indukció, rekurzív definíció

Számhalmazok jelölése

Állandó jelölések.

$\mathbb{N}$ $:= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ a természetes számok halmaza,
$\mathbb{N}_0$ $:= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza,
$\mathbb{Z}$ $:= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ az egész számok halmaza,
$\mathbb{Q}$ $:= \{a/b : a \in \mathbb{Z}, \ \ b \in \mathbb{N}\}$ a racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.

A jelölések eredete: „natural" (természetes), „Zahl" (szám), „quotient" (kvóciens, azaz hányados), „real" (valós).

Megjegyzés.

A középiskolában használt jelöléssel ellentétben a 0-t nem tekintjük természetes számnak, hiszen az emberiség csak évezredekkel a pozitív törtekkel való számolási rutin után vezette be a 0 fogalmát.

Teljes indukció

Az *indukció* alapvető része a gondolkodásunknak, de a „sok esetből az összesre következtető” módszer nem mindig állja meg a helyét. A *teljes indukció* viszont az alaphalmaz és az elvégzett lépések miatt egy bizonyítási módszert ad a „minden n-re $H(n)$” típusú állítások esetén.

Példa.

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re az első n természetes szám összege $n(n+1)/2$.

Később szükségünk lesz a következő tételre.

Tétel.

Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme. (Teljesül $\mathbb{N}$-re és $\mathbb{N}_0$-ra is.)

Teljes indukció tétele (n-ről (n+1)-re)

Teljes indukció tétele (1. alak).

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

- egyrészt $H(1)$ igaz,
- másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés.

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna írnunk.

Teljes indukció tétele (n-re az összes előzőből)

Teljes indukció tétele (2. alak).

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1)$, $H(2)$, $\ldots$, $H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.
Formálisan: Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \rightarrow H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$.

Megjegyzés.

Itt sem marad ki $H(1)$, azaz az $n = 1$ eset, hiszen akkor $\{H(1), \ldots, H(n-1)\}$ az állítások üres halmaza, amelyre a konjunkció automatikusan igaz (ld. 1. előadás, TDNF definíciója utáni megjegyzés), így $H(1)$-nek is igaznak kell lenni.

Teljes indukció tételének bizonyítása

Csak a 2. alakot bizonyítjuk, az 1. bizonyítása hasonló.

Bizonyítás („Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \to H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$").

Indirekt bizonyítjuk, azaz feltesszük hogy az állítás nem igaz. Tehát a $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \to H(n)$ feltevés teljesül, de a $B := \{k \in \mathbb{N} : H(k) = h\}$ halmaz nem üres. Korábbi tételünk szerint B-nek van legkisebb eleme; jelölje azt n. Az n választása folytán $1, \ldots, n-1 \notin B$, tehát $H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1) = i$. Ekkor azonban a feltett implikáció miatt $H(n) = i$, ami ellentmond annak, hogy $n \in B$.

Példa.

Teljes indukció segítségével bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

A teljes indukció tételének 1. alakját használjuk.

- **1. lépés:** Belátjuk a legkisebb elemre, $n = 1$ esetén $6 \mid 1^3 + 5 = 6$ teljesül.
- **2. lépés:** Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. Ez az úgynevezett **indukciós feltevés**.
- **3. lépés:** Bizonyítjuk az indukciós feltevés segítségével, hogy az állítás $n + 1$-re is igaz.

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 =$$
$$= \underbrace{(n^3 + 5n)}_{6 \mid \text{az ind. felt. miatt}} + \underbrace{3n(n+1)}_{6 \mid \text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{6 \mid}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n + 1)$-re is osztható.

Rekurzív definíció (n-ről $n+1$-re)

Rekurzív definíció (1. alak).

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció „párja" a **rekurzív definíció**: minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk definiálni az $F(n)$ fogalmat. Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk meg $F(n+1)$-et $F(n)$ felhasználásával.

Megjegyzés.

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$-at is írhattunk volna.

Rekurzív definíció (n-re az összes előzőből)

Rekurzív definíció (2. alak).

Minden $n \in \mathbb{N}$-re definiálni szeretnénk az $F(n)$ fogalmát, ehhez megadjuk az első néhány elemre a fogalmat, és az $F(n)$-et a korábbi elemek segítségével definiáljuk.

Példa.

Ilyen típusú rekurzív definíció szerepelt ítéletkalkulusban a formulák megadásánál, valamint predikátumkalkulusban a kifejezés illetve a formulák definíciója során.

Példa.

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot, az ún. **Fibonacci-sorozatot.**

Mire jó a rekurzió és a bizonyítás?

Rekurzió nélkül (triviális eseteket leszámítva) aligha lehetne programozni vagy programozási nyelveket definiálni!

Bizonyítás nélkül gyakran nem lehet előre tudni bizonyos dolgokat; pl. azt, hogy hány lépésben fut le egy algoritmus vagy program. Az előzetes becslés és számolás egyik kelléke a teljes indukciós bizonyítás. Előadáson azért bizonyítunk be néha egy-két dolgot, hogy gyakoroljuk az újonnan megismert fogalmakat, tételeket, hogy hozzászokjunk azok használatához. Másrészt — ha egyszer megértettük — a bizonyítás segít majd a tételeket, pontosan felidézni. És persze a bizonyításokban megismert fogások kellenek a feladatok megoldásához.