Diszkrét Matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

1. előadás

Követelmények, Tudnivalók

A tárgy követelményei, az előadások anyaga és segédanyagok a gyakorlatokhoz az előadó honlapján megtalálhatók:

https://www.math.u-szeged.hu/∼katai

Miről szól a matematikai logika?

A matematikai logika (más néven szimbolikus logika) a gondolkodás **formális szabályaival** foglalkozik. A „formális" azt jelenti, hogy nem az állítások tényleges jelentése, hanem a szerkezete, igazságértéke, és gondolatmenetünk helyessége érdekel bennünket. A matematikai logika ily módon a matematika megalapozását szolgálja.

A logikai műveleteket a legtöbb programozási nyelv tartalmazza.

Definíció.

Ítéletnek nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke** igaz (vagy hamis). Az ítélet tehát olyan állítás, aminek igazságértéke van. Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

Melyik ítélet és melyik nem?

Példa.

- A: Vannak földönkívüliek.
- B: Minden szám páros.
- C: Miért tanulunk logikát?
- D: Sicc!
- E: Most nem mondok igazat. (Ez az állítás sem igaz, sem hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

A fenti mondatok közül A és B ítélet, A logikai értékét nem ismerjük, B logikai értéke hamis. A C, D és E nem ítéletek.

Összetett ítéletek

Példa.

A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

F: **Ha** süt a nap, **akkor** kimegyek az uszodába.
G: Kimegyek az uszodába, **és** süt a nap.
H: **Nem** süt a nap.
I: **Csak akkor** megyek ki az uszodába, **ha** süt a nap.
J: Kimegyek az uszodába, **vagy** süt a nap.
K: **Akkor és csak akkor** süt a nap, **ha** kimegyek az uszodába.

Logikai műveletek

Definíció.

Tetszőleges A és B ítéletre definiáljuk az alábbi **összetett ítéleteket**:

(a) A **negációja** a „nem A" ítélet (jel.: $\neg A$),
(b) A, B **konjunkciója** az „A és B" ítélet (jel.: $A \wedge B$),
(c) A, B **diszjunkciója** az „A vagy B" ítélet (jel.: $A \vee B$),
(d) A, B **implikációja** a „ha A, akkor B" ítélet (jel.: $A \rightarrow B$),
(e) A, B **ekvivalenciája** az „akkor és csak akkor A, ha B" ítélet (jel.: $A \leftrightarrow B$).

Ha egy ítélet nem összetett ítélet, akkor **prímítéletnek** nevezzük.

Az ítéletkalkulusban a prímítélet a tovább nem bontható építőkő, az atom. Az igaz és hamis logikai értéket a továbbiakban i, illetve h jelöli. (Sok más helyen, pl. sok programozási nyelvben 1, illetve 0 jelöli az igaz, illetve hamis logikai értékeket.)

Logikai műveletek igazságtáblázata

Definíció.

Az előző definicióban bevezetett öt logikai művelet művelettáblázatai a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke is kiszámítható:

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i

Megjegyzés

A konjunkció akkor és csak akkor igaz, ha mindkét tag igaz. A diszjunkció akkor és csak akkor hamis, ha mindkét tag hamis. Az implikáció akkor és csak akkor hamis, ha az előtag igaz és az utótag hamis.

Példa.

Aköznapi **és** nem mindig fejez ki konjunkciót, valamint a konjunkciót nem csak az **és** fejezheti ki.

- L: Péter és Pál szomszédok (**Nem konjunkció:** külön-külön nem mondhatjuk, hogy szomszéd.)
- M: Péter és Pál haragtartó (**Konjunkció:** csak rövidítése a „Péter haragtartó **és** Pál haragtartó." mondatnak.)
- N: Péter elmegy a sarokig és balra fordul. (**Nem konjunkció:** időrendiséget fejez ki.)
- O: Szeretem a csokoládét, de utálom a kelkáposztát. (**Konjunkció:** a **de** helyettesíthető **és**-sel.)

Diszjunkció és a hétköznapi nyelv

A matematikai logikában és a matematikában is a **vagy** kötőszót mindig abban az értelemben használjuk, hogy akár mind a kettő megtörténthet. Ez az ún. **megengedő vagy**.

Példa.

A mindennapi életben a „vagy” kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

- P: Kávét hoz, vagy álmos. (**Megengedő vagy:** akár mind a kettő megtörténthet.)
- Q: Gyalog megy, vagy biciklizik. (**Kizáró vagy:** csak az egyik történhet meg.)

Az „A kizáró vagy B” ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetünk be új logikai műveletet.

Implikáció szövegesen

Példa.

A „ha A, akkor B”, „csak akkor A, ha B”, „B szükséges feltétele A-nak” és „A-ból következik B” ítéletek mind ugyanazt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

R: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.
S: Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.
T: A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.
U: Megyek uszodába, ebből következik, hogy süt a nap.

Ekvivalencia szövegesen

Példa.

Az „akkor és csak A, ha B”, „pontosan akkor A, ha B”, „A-nak szükséges és elegendő feltétele B” és „A ekvivalens B-vel” ítéletek mind ugyanazt jelentik.

- V: Egy egész szám akkor és csak akkor páros, ha osztható 2-vel.
- W: Egy egész szám pontosan akkor páros, ha osztható 2-vel.
- X: Egy egész szám párosságának szükséges és elegendő feltétele a 2-vel való oszthatóság.
- Y: Egy egész szám párossága ekvivalens a 2-vel való oszthatósággal.

Formula

Definíció.

Ítéletváltozónak nevezzük az olyan változókat, amelyek prímítéleteket jelölnek. Az **ítéletkalkulus formulái** a következők:

(a) az ítéletváltozók mindegyike formula,
(b) ha F és G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula, és
(c) minden ítéletkalkulusbeli formula (a) és (b) véges számú alkalmazásával kapható meg.

A fenti definíció egy rekurzív definícó.

Definíció.

Legyenek F és G formulák. Azt mondjuk, hogy a G **részformulája** F-nek, ha G fellép az F formula előző definícióban leírt előállítása során.

Részformulák megadása

Példa.

A $(\neg A) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C)$ formula részformulái:

$$A, \quad B, \quad C, \quad (\neg A), \quad (\neg B), \quad (\neg B) \leftrightarrow C, \quad (\neg A) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C).$$

Összesen 7 részformulája van a formulának.

Megjegyzés.

Adott formula ítéletváltozói mindig részformulái a formulának, továbbá a teljes formula is mindig részformulája önmagának.

Formalizálás (1.)

Példa.

Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben az ítéletváltozók prímítéleteket jelölnek. Például az

S: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

Sz: Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.

Z: Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

ítéletek egy-egy lehetséges formalizálása a következő: $S = A \to B$, $Sz = (\neg B) \to (\neg A)$, $Z = \neg(A \wedge (\neg B))$, ahol az A és B ítéletváltozók rendre a „Kimegyek az uszodába.” és „Süt a nap.” prímítéleteket jelöli.

Formalizálás (2.)

Példa.

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:

Zs: Ha sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.

A prímítéleteket jelöljük a következő ítéletváltozókkal A: „Sáros a reflektor.", B: „Törött a reflektor.", C: „Aznap földrengés volt.", D: „Az operatőr prémiumot kap", E: „Az operatőr időben érkezik." F: „Napfogyatkozás van". Ekkor a keresett formula:

$$((A \vee B) \wedge C) \ \rightarrow \ (D \leftrightarrow (E \wedge \neg F)).$$

Formula igazságtáblázata

Definíció.

Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a formula igazságértéke a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuk a formula **igazságtáblázatát**.

Példa.

A $Z = \neg(A \wedge (\neg B))$ formula igazságtáblázata (a táblázat utolsó oszlopa) a formula felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$Z = \neg(A \wedge \neg B)$
i	i	h	h	i
i	h	i	i	h
h	i	h	h	i
h	h	i	h	i

Logikai ekvivalencia, Tautológia, TDNF

Definíció.

Az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblazata megegyezik). Jelölés: $F \equiv G$.

Definíció.

Az F formulát **tautológiának** nevezzük, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv i$.

Tétel.

Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

(1) Az implikáció kifejezése diszjunkció és negáció segítségével:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B.$$

(2) $\neg$ alaptulajdonsága:

$$\neg(\neg A) \equiv A.$$

(3) De Morgan azonosságok:

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), \qquad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B).$$

☞

Tétel. (folyt.)

(4) $\wedge$ és $\vee$ alaptulajdonságai:

$$A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A \qquad \textbf{idempotencia,}$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A \qquad \textbf{kommutativitás,}$$

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \qquad \textbf{asszociativitás,}$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \quad A \vee (A \wedge B) \equiv A \qquad \textbf{abszorptivitás,}$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad \textbf{disztributivitás.}$$

☞

Tétel. (folyt.)

(5) $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ alaptulajdonságai:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A),$$

$$A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A), \qquad A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C,$$

$$(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), \qquad A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C),$$

$$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A \qquad \textbf{kommutativitás,}$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \qquad \textbf{asszociativitás.}$$

Tétel. (folyt.)

(6) i és h alaptulajdonságai:

$$A \wedge (\neg A) \equiv h, \quad A \vee (\neg A) \equiv i,$$

$$A \wedge i \equiv A, \quad A \vee i \equiv i,$$

$$A \wedge h \equiv h, \quad A \vee h \equiv A,$$

$$i \to A \equiv A, \quad h \to A \equiv i,$$

$$A \to i \equiv i, \quad A \to h \equiv \neg A,$$

Tétel.

Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosan akkor teljesül, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

Tétel.

Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Tétel.

Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve a változók minden előfordulásánál, újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

Példa.

A tételek felhasználásával igazoljuk, hogy a két formula ekvivalens.

$$F = ((A \wedge B) \to C) \vee D, \qquad G = \neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D).$$

$G = \neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D) \equiv \neg(\neg((A \wedge B) \to C)) \vee \neg(\neg D) \equiv ((A \wedge B) \to C) \vee D = F.$

Először az egyik De Morgan azonosságban helyettesítettük az ítéletváltozókat más formulával, és alkalmaztuk rá az előző tételt, majd a dupla negációra vonatkozó ekvivalenciát alkalmaztuk a részformulákra.

Teljes diszjunktív normálforma (TDNF)

Definíció.

Az F formulát **diszjunktív normálformának** nevezünk, ha $F = K_1 \vee \cdots \vee K_t$ alakú, ahol a $K_1, \ldots, K_t$ formulák mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója, oly módon, hogy K_i-ben ($1 \leqslant i \leqslant m$) minden változó legfeljebb egyszer szerepel.
Ha az $A_1, \ldots, A_n$ változókból felépített $K_1 \vee \cdots \vee K_t$ diszjunktív normálforma esetén a $K_1, \ldots, K_t$ formulák páronként különböző n-tagú konjunkciók, amelyekben az $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul, akkor **teljes diszjunktív normálformáról (TDNF)** beszélünk.

Megjegyzés.

Megengedjük a 0-tagú, üres diszjunkciót h jelentéssel, és az üres, 0-tényezőjű konjukciót is i jelentéssel. Tehát a konstans i és h is diszjunktív normálformának tekinthető, a h teljes diszjunktív normálforma, az i nem teljes diszjunktív normálforma.

Példa.

Tekintsük az A, B, C változókból felépített alábbi formulákat:

- $A \wedge (\neg B)$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
- $A \wedge (\neg B) \wedge C$ (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)),
- $A \vee B \vee C$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
- $(A \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge C)$ (diszjunktív normálforma, de nem TDNF),
- $(A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)).

Tétel.

Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

A teljes diszjunktív normálforma az F igazságtáblázatából az alábbi módon határozható meg: a keresett $K_1 \vee \cdots \vee K_t$ TDNF-ben t a táblázat azon sorainak a száma, ahol a formula az i logikai értéket veszi fel.
Minden ilyen sorhoz a megfelelő K_i-t úgy kapjuk, hogy pontosan azon változókat negáljuk, amelyek a h értéket veszik fel, és ezek után vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.

Példa.

Legyen $F = A \wedge \big(\neg(B \to C) \vee (\neg B \wedge \neg C)\big)$. Ekkor F igazságtáblázata:

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg C$	$B \to C$	$\neg(B \to C)$	$\neg(B \to C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$	F
i	i	i	h	h	h	i	h	h	h
i	i	h	h	i	h	h	i	i	i
i	h	i	i	h	h	i	h	h	h
i	h	h	i	i	i	i	h	i	i
h	i	i	h	h	h	i	h	h	h
h	i	h	h	i	h	h	i	i	h
h	h	i	i	h	h	i	h	h	h
h	h	h	i	i	i	i	h	i	h

Példa.

Legyen $F = A \wedge \big(\neg(B \to C) \vee (\neg B \wedge \neg C)\big)$. Ekkor F igazságtáblázata:

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg C$	$B \to C$	$\neg(B \to C)$	$\neg(B \to C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$	F
i	i	i	h	h	h	i	h	h	h
i	i	h	h	i	h	h	i	i	i
i	h	i	i	h	h	i	h	h	h
i	h	h	i	i	i	i	h	i	i
h	i	i	h	h	h	i	h	h	h
h	i	h	h	i	h	h	i	i	h
h	h	i	i	h	h	i	h	h	h
h	h	h	i	i	i	i	h	i	h

Példa.

Legyen $F = A \wedge \big(\neg(B \to C) \vee (\neg B \wedge \neg C)\big)$. Ekkor F igazságtáblázata:

A	B	C	F
i	i	i	h
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	i
h	i	i	h
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	h

Így F igazságértéke pontosan akkor igaz, ha A, B igaz és C hamis, vagy A igaz és B, c hamis. Ezért F teljes diszjunktív normálformája:

$$(A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)).$$

A diszjunktív normálformák egyik alkalmazása a logikai áramkörök tervezése.

Ítéletkalkulus elektronikus teszt

Az elektronikus tesztek a https://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/ oldalon érhetők el. Az első elektronikus teszt a második hét végén indul, regisztrálni már lehet. További részletek az előadó honlapján.

E-teszt.

Formalizálja az alábbi mondatokat, és döntse el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. A prímítéletek mindig pozitívak (nem tartalmaznak tagadást), és a mondatban való előfordulásuk sorrendje szerint jelöljük őket az $A, B, C, \ldots$ betűkkel.

„Ha esik az eső, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha röpdolgozatot írunk.” $A = i, B = h, C = h, D = h$.

E-teszt.

Formalizálja az alábbi mondatokat, és döntse el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. A prímítéletek mindig pozitívak (nem tartalmaznak tagadást), és a mondatban való előfordulásuk sorrendje szerint jelöljük őket az $A, B, C, \ldots$ betűkkel.

„Ha esik az eső, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha röpdolgozatot írunk." $A = i, B = h, C = h, D = h$.

Prímítéletek:

- A: Esik az eső.
- B: Rossz kedvem van.
- C: Megyek dimat gyakorlatra.
- D: Röpdolgozatot írunk.

$$\begin{array}{ccccc} (A \wedge (\neg B)) & \rightarrow & (C \leftrightarrow D) & & \\ i \qquad h & & h \qquad h & : & \textbf{Az ítélet igaz.} \end{array}$$

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- Az $(A \wedge B) \vee \neg C$ formula részformuláinak száma 7.
- $B \vee (\neg B) \equiv A \leftrightarrow (\neg A)$.
- A $(\neg B \leftrightarrow A) \vee B$ formula teljes diszjunktív normálformájában 2 darab diszjunkciójel van.

Ítéletkalkulus elektronikus teszt (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- Az $(A \wedge B) \vee (\neg C)$ formula részformuláinak száma 7.
  A formula részformulái a rekurzióval megadott definíció szerint: A, B, C, $(\neg C)$, $(A \wedge B)$, $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, tehát 6 részformulája van. **Hamis** az állítás.
- $B \vee (\neg B) \equiv A \leftrightarrow (\neg A)$.
  A bal oldal mindig igaz, a jobb oldal mindig hamis. **Hamis** az állítás.
- A $(\neg B \leftrightarrow A) \vee B$ formula teljes diszjunktív normálformájában 2 darab diszjunkciójel van.
  A formula egy esetben hamis, ha A és B is hamis, az igazságtáblázatában 3 darab i szerepel. **Igaz** az állítás.

Elektronikus teszt (3. fel.)

Mindegyik elektronikus teszt 3. feladata az elméleti részhez kapcsolódó igaz/hamis kérdéseket tartalmaz.

A Diszkrét matematika I. előadások diáinál felhasznált irodalom

- Czédli Gábor: Diszkrét matematika I. – előadásfóliák (2005-2019)
- Maróti Miklós: Diszkrét matematika – előadásvázlat
- Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika – Polygon jegyzet