Diszkrét matematika I.

7.7 a), b) és d) feladat

Bolyai Intézet

2020. október 12.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-2)$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot(-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot(-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot(-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Mivel a gyökjel alatt negatív szám áll, ezért a mátrixnak nincsen valós sajátértéke.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3)$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3) =$$
$$= -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3) = \\ &= -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \end{aligned}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3) =$$
$$= -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3) =$$
$$= -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Az egyenlet megoldásai: $\lambda_1 = -3$ és a $\lambda_2 = 1$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-3) = $$
$$= -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Az egyenlet megoldásai: $\lambda_1 = -3$ és a $\lambda_2 = 1$.

Tehát a mátrix két sajátértéke a $\lambda_1 = -3$ és a $\lambda_2 = 1$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{-t}]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $(1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 0$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $(1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 0$.

Az egyenlet megoldásai: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ és a $\lambda_3 = 3$.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda\text{–}t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit: $(1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 0$.

Az egyenlet megoldásai: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ és a $\lambda_3 = 3$.

Tehát a mátrix két sajátértéke a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ és a $\lambda_3 = 3$.