Diszkrét matematika I.

5.1.(a) feladat

Bolyai Intézet

2020. szeptember 22.

1. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket, ahol:
$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x^2$ és $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto 3x + 1$.

Megoldás. Először megadjuk az $\alpha\beta$ leképezést, azaz keressük tetszőleges valós szám képét $\alpha\beta$ esetén.
Ekkor a szorzás definíciója alapján:

$$\alpha\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x\alpha)\beta.$$

Mivel α esetén $x \mapsto x^2$, így behelyettesítve kapjuk a következőt: $\alpha\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\beta$.
A β leképezés definíciója szerint: $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto 3y + 1$.
Mivel β-t x^2-re kell alkalmaznunk, így $x^2 \mapsto 3x^2 + 1$. Tehát megkaptuk a megoldást:

$$\alpha\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x^2 + 1.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk a $\beta\alpha$ leképezést, azonban most természetesen fordított sorrendben végezzük el a két leképezést (először a β-át, utána az α-át):

$$\beta\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x\beta)\alpha.$$

A β definíciója alapján: $\beta\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (3x + 1)\alpha$, hiszen x képe $3x + 1$, tehát ennek a képét keresem α mellett, ami α definíciója alapján: $3x+1 \mapsto (3x+1)^2$. Így $x \mapsto (x\beta)\alpha = (3x + 1)\alpha = (3x + 1)^2$ Megkaptuk a másik keresett leképezést:

$$\beta\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (3x + 1)^2.$$

A zárójelet felbontva:

$$\beta\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 9x^2 + 6x + 1.$$