TUDNIVALÓK

- **A dolgozatban 8-9 feladat lesz.** A feladat pontszámok csak tájékoztató jellegűek, még változhatnak. A dolgozat értékelését a CooSpace automatikusan elvégzi, a feladat szövegében szerepel, ha lehet részpontot is szerezni az adott feladatnál. **Minden feladathoz a számításokat is fel kell tölteni a gyakorlatvezető által megadott helyre. Csak akkor kapják meg a helyes megoldásért a feladatra a pontot, ha a megoldást a számolás alátámasztja.**
- **A CooSpace-en a gyakorlatok színterén található egy minta-dolgozat a „Gyakorlótesztek”-nél, amit ezekből a mintafeladatokból állítottunk össze.** A gyakorlóteszt kitöltésének eredményét az oktatók nem látják, csak gyakorlásra szolgál. Ügyeljenek, hogy a válaszokat a megadott formában írják.
- A dolgozatot önállóan kell megoldani. A dolgozat első lapjára kézzel le kell írni a következő nyilatkozatot a saját nevükkel (nem kell aláírni).

  .... *kijelentem, hogy a zárthelyi dolgozat ideje alatt, és a feltöltési határidő lejártáig más személynek semmilyen segítséget nem adtam, és más személytől semmilyen segítséget nem fogadtam el. Tudomásul veszem az SZTE TTIK Tanulmányi és Vizsgaszabályzatában foglaltakat és bizonyított megszegés esetében a két félévre való tanulmányi felfüggesztést.*
- A dolgozatot a CooSpace-en a gyakorlat időpontjában írják, a gyakorlat színterén. A dolgozat elkezdésére 30 perc áll rendelkezésükre, a feladatok megoldására pedig a kezdéstől számítva 100 perc. A kézzel írt feladatmegoldások feltöltésének helyét és határidejét a gyakorlatvezetők adják meg.

1. Feladat.
Legyen α és β a következő két leképezés:

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\alpha = 2^{x+1}, \qquad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\beta = 3 \cdot x.$$

Ekkor

$$\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\alpha\beta = \dots$$

◯ $2^{3\cdot(x+1)}$
◯ $2^{3\cdot x+1}$
◯ $3 \cdot 2^{x+1}$
◯ $(3 \cdot 2)^{x+1}$
◯ A többi válasz nem helyes.

A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (4 pont)

MEGOLDÁS. A 3. válasz a helyes.

2. Feladat. Döntse el, hogy injektív-e, szürjektív-e az

$$\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

leképezés. (Mindkét tulajdonság esetén a jó válasz: 2 pont, rossz válasz: $-0,5$ pont, nincs válasz: 0 pont.) A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (4 pont)

MEGOLDÁS. Szürjektív, nem injektív

3. Feladat.
Döntse el, hogy az alábbi halmazok számossága megegyezik-e $\mathbb{N}$ számosságával.

◯ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
◯ $\mathbb{N}^3$
◯ $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

◯ $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

(Minden halmaz esetén a jó válasz: 1 pont, rossz válasz: $-0,25$ pont, nincs válasz: 0 pont.) A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. $(4\ \text{pont})$

MEGOLDÁS. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^3| = |\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$.

4. Feladat. Határozza meg, mi a kanonikus alakja a következő szorzatnak:

$$(3 + 2i)(\overline{-4 - i}).$$

A szorzás eredményét kanonikus alakban adja meg úgy, hogy ne használjon szóközt, például a -3+4i egy lehetséges válasz. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. $(5\ \text{pont})$

MEGOLDÁS. -14-5i

5. Feladat.
Határozza meg, mi a kanonikus alakja a következő hányadosnak:

$$\frac{-5 + 3i}{-4 - 2i}$$

◯ $\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i$
◯ $\frac{13}{6} - \frac{11}{6}i$
◯ $\frac{7}{6} - \frac{11}{12}i$
◯ $-\frac{13}{10} + \frac{1}{10}i$
◯ A többi válasz nem helyes.

A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. $(5\ \text{pont})$

MEGOLDÁS. Az 1. válasz a helyes.

6. Feladat. Adja meg a $-\sqrt{3} - i$ komplex szám abszolút értékét és argumentumát. A szöget FOKBAN adja meg úgy, hogy a $[0; 360)$ intervallumba essen. Először az abszolútértéket adja meg, majd vesszővel elválasztva a szöget, ne használjon szóközt. Például az $1,270$ egy lehetséges válasz. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. $(5\ \text{pont})$

MEGOLDÁS. $2,210$

7. Feladat.
Határozza meg a hatványozás eredményét kanonikus alakban:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-14}.$$

◯ $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
◯ i
◯ $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
◯ $-i$
◯ A többi válasz nem helyes.

A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. $(5\ \text{pont})$

MEGOLDÁS. A 4. válasz a helyes

8. Feladat.
Döntse el, hogy melyek gyökei, és melyek nem az

$$x^4 - 3x^2 - 10$$

polinomnak.

○ $-\sqrt{2}$
○ $-\sqrt{2}i$
○ $1+\sqrt{2}i$
○ $\sqrt{5}$
○ $-\sqrt{5}i$

(Minden feladatrész esetén a jó válasz: 1 pont, rossz válasz: $-0,25$ pont, nincs válasz: 0 pont.) A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{5}$

9. Feladat. Határozza meg az $(-1,6)$, $(2,-6)$, $(5,18)$ pontokra illeszkedő L Lagrange-polinomot. Válaszában az L polinom 4 helyen vett helyettesítési értékét adja meg, azaz határozza meg az $L(4)$ számot. Ha az érték nem egész szám, akkor közönséges törtként adja meg, leegyszerűsített formában, például a $-12/8$ számot $-3/2$ alakban. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. 6

10. Feladat. Legyen

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\qquad \text{és}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 9\end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az $(A^T+B)C$ mátrixot, majd válaszként a kapott mátrix elemeinek összegét adja meg. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. 16

11. Feladat. Határozza meg az

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

determinánst. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. -25

12. Feladat. Határozza meg az $(-1,3,2)$, $(1,0,-3)$, $(1,2,-3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát. (Ügyeljen arra, hogy a térfogat nemnegatív szám.) A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. 2

13. Feladat. Határozza meg az

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

valós mátrix sajátértékeit.

Ha a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van, azokat növekvő sorrendben sorolja fel, vesszővel elválasztva, a megoldásban ne használjon szóközt, például a $-3,5$ egy lehetséges válasz. Ha a mátrixnak nincs valós sajátértéke, a válasza legyen x. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. $1,7$

14. Feladat. Adja meg az

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

mátrix inverzének elemeinek összegét. Ha az érték nem egész szám, akkor közönséges törtként adja meg, leegyszerűsített formában, például a $-12/8$ számot $-3/2$ alakban. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. 5

15. Feladat. Gauss-elimináció segítségével határozza meg a kötött és a szabad ismeretlenek számát a következő lineáris egyenletrendszer esetén

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 &= -9 \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Először a kötött ismeretlenek számát adja meg, majd vesszővel elválasztva a szabad ismeretlenek számát. A megoldásban ne használjon szóközt, például a $2,3$ egy lehetséges válasz. Ha a lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, a válasza legyen x. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (5 pont)

MEGOLDÁS. $3,1$

16. Feladat. Döntse el, hogy a $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (-3,-8,9)$ vektorrendszer lineárisan független-e, illetve generátorrendszert alkot-e $\mathbb{R}^3$-ben. (Mindkét tulajdonság esetén a jó válasz: 2 pont, rossz válasz: $-0,5$ pont, nincs válasz: 0 pont.) A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (4 pont)

MEGOLDÁS. nem lineárisan független, nem generátorrendszer

17. Feladat. Határozza meg a $v = (3,-7,-2)$ vektor koordinátasorát a $(-1,-2,2)$, $(1,-2,-3)$, $(2,3,3)$ bázisban.

A válaszban ne használjon szóközt, például a (3,-5,1) egy lehetséges válasz. A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (4 pont)

MEGOLDÁS. $(2,3,1)$

18. Feladat.
Döntse el, hogy az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében mely vektorok alkotnak bázist.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

- ◯ $(1,1,0,0)$, $(-1,-1,0,0)$
- ◯ $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$
- ◯ $(-1,-1,0,0)$
- ◯ $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$
- ◯ A többi válasz nem helyes.

A helyes válasz önmagában nem elegendő, azt meg is kell írásban indokolni. (4 pont)

MEGOLDÁS. A 2. válasz a helyes.