2.6 feladat a) e) és f) részének a megoldása

Segédanyag a Diszkrét matematika I. kurzushoz

2.6 feladat
Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

(a) Minden informatikus éhes.

(b) Ha egy szakács éhes, főz magának.

(c) Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.

(d) Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.

(e) Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.

(f) Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.

(g) Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.

2.6 feladat megoldása
(a) feladatrész:
Mivel a feladat nem adta meg a felhasználandó prédikátumjeleket, ezért először vezessük be azokat, amelyek a mondat formalizálásához szükségesek. A feladat során végig észben tartjuk, hogy a individuumtartomány az emberek halmaza. Formalizálnunk kell azt, hogy egy ember *informatikus*, illetve hogy *éhes*, ezért a következő prédikátumjeleket vezetjük be:

$$I(x): \ x \textit{ informatikus} \qquad E(x): \ x \textit{ éhes}$$

Ahhoz, hogy jobban lássuk a mondatban fellépő logikai műveleteket, érdemes a mondatot kicsit átfogalmazni, a jelentéstartalom megváltoztatása nélkül:

Minden ember, ha informatikus, akkor éhes.

A *minden ember* miatt a formulát az $(\forall x)$ univerzális kvantorral kezdjük, a *ha informatikus, akkor éhes* rész miatt az implikáció logikai műveletét használjuk, használva az előbb bevezetett jelöléseket: $I(x) \to E(x)$. Tehát mondat formalizálva:

$$(\forall x)(I(x) \to E(x))$$

Előadáson volt róla szó, hogy kvantort úgy is tagadhatunk, ha a kvantort kicseréljük és a kvantor után szereplő formulát tagadjuk. Azaz:

$$(\exists x)(\neg(I(x) \to E(x)))$$

Érdemesebb ezt a tagadást úgy átírni, hogy a negáció már csak prédikátumjelre vonatkozzon, még ha a feladat ezt külön nem is kéri. Az előadásról tudjuk, hogy a $\neg(I(x) \to E(x))$ részformulát kicserélhetjük egy vele ekvivalens részformulára. Azt is tudjuk, ha egy az ítéletkalkulusban lévő ekvivalenciában az ítéletváltozókat kicseréljük prédikátumkalkulusbeli formulákra, akkor megint ekvivalens formulát kapunk. Mivel a feladatban implikáció tagadása szerepel, nézzük meg, hogy milyen ekvivalenciát ismerünk ítéletkalkulusból:

$$\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$$

Tehát, ha A helyébe $I(x)$-et, B helyébe $E(x)$-et helyettesítünk, akkor továbbra is ekvivalenciát kapunk:

$$\neg(I(x) \to E(x)) \equiv I(x) \wedge \neg E(x)$$

Azaz azokat az ekvivalenciákat, amelyeket ítéletkalkulusból ismerünk, "átemelhetjük" a prédikátumkalkulusbeli formuláinkba, és alkalmazhatjuk őket. Az előző ekvivalenciát visszaírva:

$$(\exists x)(\neg(I(x) \to E(x))) \equiv (\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$$

A tagadást hétköznapi nyelvre is le kell fordítani. A $(\exists x)$ rész visszaolvasva: *Létezik ember, aki.* A $(I(x) \wedge \neg E(x))$ rész pedig: *informatikus és nem éhes.* Azaz egyben:

Létezik ember, aki informatikus és nem éhes.

A fenti mondat kicsit magyartalan, ezt még csiszolhatjuk:

Van olyan informatikus, aki nem éhes.

(e) feladatrész:
Új prédikátumjeleket kell bevezetnünk. Az egyik arra vonatkozik, hogy valaki *szakács*-e, a másik a *valaki kedvel valakit* kapcsolatot kell hogy megjelenítse, a harmadik pedig a *valaki főz valakire* részt kell hogy kifejezze:

$S(x)$: *x szakács* $\quad$ $K(x, y)$: *x kedveli y-t* $\quad$ $F(x, y)$: *x főz y-ra*

Majd kicsit átírjuk a mondatot, hogy a szerkezetét jobban lássuk:

Minden informatikus minden szakácsot kedvel, ha főz neki.

Látjuk, hogy két univerzális kvantor is megjelenik a mondatban. Kezdjük tehát a formulánkat $(\forall x)(\forall y)$-nal, hiszen minden x-re és y-ra teljesül, ha x informatikus és y olyan szakács, aki főz x-re, akkor x kedveli y-t. Ebből az is látszik, hogy egy implikációt kell használnunk, aminek első fele a három feltételt tartalmazza és-sel összekötve: $I(x) \wedge S(y) \wedge F(y, x)$, második fele pedig a következmény, hogy x kedveli y-t: $K(x, y)$. Azaz a teljes formula:

$$(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge S(y) \wedge F(y, x)) \to K(x, y))$$

Ennek tagadása:

$$\neg(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge S(y) \wedge F(y, x)) \to K(x, y))$$

Mivel kvantort nem tagadhatunk, át kell alakítanunk a fenti formulát. Ha a formula elején két kvantor áll, akkor mindkettőt lecseréljük és a kvantorok utáni részt tagadjuk:

$$\neg(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge S(y) \wedge F(y,x)) \to K(x,y)) \equiv$$
$$(\exists x)(\exists y)\neg((I(x) \wedge S(y) \wedge F(y,x)) \to K(x,y))$$

Az implikáció tagadása az a) részhez hasonlóan megy:

$$(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge S(y) \wedge F(y,x) \wedge \neg K(x,y))$$

Hogy olvassuk vissza a formulát? A $\exists x$ és az $I(x)$, valamint az $\exists y$ és az $S(y)$ miatt a mondat eleje:

Létezik informatikus és létezik szakács...

Az $F(y,x)$ azt jelenti, hogy a szakács (akinek a létezésére utaltunk) főz az informatikusra és a $\neg K(x,y)$ azt jelnti hogy az informatikus nem szereti ezt a szakácsot. Azaz:

Létezik informatikus és létezik szakács, hogy a szakács főz az informatikusra, de az informatikus nem szereti szakácsot (aki főz rá).

Ez elég magyartalan, szebben:

Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.

(f) feladatrész:
A szerencsésség és a szerencsétlenség eddig nem fordult elő, ezért az új prédikátumjel legyen:

$Sz(x)$: *x szerencsés*

A fenti tagadásával a szerencsétlenséget is ki tudjuk fejezni. Mézga Géza egy konkrét személy, nem pedig az emberek egy részhalmaza (mint a szakácsok és informtikusok), ezért vezessünk be rá egy individuumkonstanst:

m : *Mézga Géza*

Bármikor, amikor Mézga Gézára kell utalni a formalizálásban, ezt az m változót fogjuk használni. Mézga Géza gyerekei is előkerülnek, de őket konstanssal nem jelölhetjük, mint az előbb Gézát, hiszen nem feltétlen egy konkrét emberre utalunk, hanem többre, ezért itt egy kétváltozós jelet használnunk:

$G(x,y)$: *x gyereke y-nak*

Most már rátérhetünk a formalizálásra. Az eredeti mondat két részből áll, és egy *de* szóval vannak összekapcsolva, ami átírva:

Mézga Géza nem szerencsés és a gyermekei szerencsések.

Az első rész egyszerűen $\neg Sz(m)$ formalizálva. A második rész átfogalmazva:

Minden ember, akire igaz, hogy Mézga Géza gyermeke, szerencsés.

Ebből már látszik, hogy a mondat második felében kell egy univerzális kvantort és egy implikációt használni. Az implikáció első fele $G(x,m)$, a második $Sz(x)$:

$$(\forall x)(G(x,m) \to Sz(x))$$

A kettő formula és-sel összekapcsolva:

$$\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \rightarrow Sz(x))$$

A fenti formulát tagadni is kell. Ítéletkalkulusból emlékszünk a De-Morgan azonosságokra, miszerint

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Először ezt az azonosságot, majd pedig az implikáció tagadására felhasznált formulánkat használva:

$$\neg(\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \rightarrow Sz(x))) \equiv Sz(m) \vee \neg(\forall x)(G(x,m) \rightarrow Sz(x)) \equiv$$

$$Sz(m) \vee (\exists x)(G(x,m) \wedge \neg Sz(x))$$

Visszaolvasva a mondatot:

Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan ember,
aki Mézga Géza gyermeke és nem szerencsés.

Szebben:

Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.