

4. feladatsor – Műveletek és algebrák

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát, $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát, $\mathbb{R}^{m \times n}$ az $m \times n$ -es valós mátrixok halmazát, továbbá $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : |M| \neq 0\}$, azaz az $n \times n$ -es invertálható valós mátrixok halmazát jelöli. Valamint jelölje B^A az A halmazból B halmazba menő leképezések halmazát, S_n pedig tetszőleges pozitív n egész esetén az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációjának halmazát.

4.1. Feladat. Művelet-e

- (a) az S_n halmazon a szorzás;
- (b) az összeadás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
- (c) az osztás a $\mathbb{Q}$ halmazon;
- (d) $GL(n, \mathbb{R})$ halmazon a mátrixok szorzása.
- (e) $GL(n, \mathbb{R})$ halmazon a mátrixok összeadása.
- (f) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
- (g) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.

4.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (a) $(S_2; \cdot)$;
- (b) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$;
- (c) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
- (d) $(\{a, b, c\}; \circ)$, ahol $x \circ y = y$.

4.3. Feladat. Az alábbi művelettáblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

	$*$	a	b	c	d		$*$	a	b	c	d
	a	a	a	a	a		a	a	b	c	d
(a)	b	a	b	c	d		b	b	c	a	a
	c	b	c	b	b		c	c	a	b	a
	d	d	d	a	a		d	d	d	d	d

4.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatív-e, kommutatív-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid félcsoporthot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (a) $(\mathbb{Q}; \circ)$, ahol $x \circ y = x$;
- (b) $(\mathbb{N}; *)$, ahol $m * n = mn - m + n$;
- (c) $(\mathbb{R}; \square)$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;
- (d) $(\mathbb{R}; \triangle)$, ahol $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$;
- (e) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}; \oplus)$, ahol $x \oplus y = |x - y|$.

4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoporthok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

- (a) $(\mathbb{N}; +)$; (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; (c) $(\mathbb{Z}; +)$; (d) $(\mathbb{Q}; +)$;
 (e) $(S_4; \cdot)$; (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
 (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; (j) $(A^A; \cdot)$; (k) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$; (l) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$;
 (m) $(\mathbb{Z}; -)$; (n) $(GL(n, \mathbb{R}); \cdot)$; (o) $(\mathbb{C}; \cdot)$.

4.6. Feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

- (a) $G = (GL(2, \mathbb{R}); \cdot)$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
 (b) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $a = i$;
 (c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
 (d) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$, $a = -2$;
 (e) $G = (S_7; \cdot)$, $a = (123)(4567)$.

4.7. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebraik közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$;
 (e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3 \times 3}; +; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$.

Szorgalmi feladatok

4.8. Feladat. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható az $A = \{a, b\}$ halmazon, amellyel A grupoidot, monoidot, csoportot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet-táblázatuk nem egyezik meg.)

4.9. Feladat. Legyen az A halmaz n -elemű. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható A -n, amellyel A grupoidot, kommutatív grupoidot, egységelemes grupoidot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet-táblázatuk nem egyezik meg.)

4.10. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \cdot)$ grupoidot, ahol $\cdot$ a szokásos leképezésszorítás. Legyen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \text{id}_{\mathbb{N}}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

4.11. Feladat. Igaz-e minden A nem üres halmaz és minden asszociatív $\circ: A \times A \rightarrow A$ művelet esetén, hogy ha minden $x, y \in A$ -ra teljesül az $x \circ y \circ y = x$ egyenlőség, akkor $\circ$ kommutatív?

4.12. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoporthban van olyan elem, melynek a négyzete önmaga. (A félcsoporth művelete szorzás a feladatban.)

4.13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy csoport minden elemének az egységelem a négyzete, akkor a csoport kommutatív.

4.14. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet definiálni a műveleteket az $A = \{a, b\}$ halmazon, hogy A a műveletekkel testet alkosson.