

3. feladatsor – Komplex számok

3.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva végezzük el a következő műveleteket, adjuk meg a végeredmény kanonikus alakját:

- | | |
|--|--|
| (a) i^{2019} ; | (g) $\frac{\overline{1+3i}}{3+2i}$; |
| (b) i^{-22} ; | (h) $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$; |
| (c) $(3+5i)(2-7i)$; | (i) $\frac{\operatorname{Re}(3+5i) - (4-2i)}{(3-2i) + \operatorname{Im}(6+i)}$. |
| (d) $\frac{(-6+9i)+4-8i}{1} \cdot i$; | |
| (e) $ -3+4i \cdot (-3-i)$; | |
| (f) $\frac{-7-i}{1+4i}$; | |

3.2. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át trigonometrikus alakba ezeket:

- | | | |
|------------|------------------------------|------------------------|
| (a) 3; | (d) $-8i$; | (g) $2-2\sqrt{3}i$; |
| (b) -5 ; | (e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; | (h) $-\sqrt{3} - i$; |
| (c) i ; | (f) $1-i$; | (i) $-3 + \sqrt{3}i$. |

3.3. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi trigonometrikus alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át kanonikus alakba ezeket:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$; | (c) $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; | (e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$; |
| (b) $3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$; | (d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$; | (f) $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$; |
| | | (g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$. |

3.4. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét, majd adjuk meg az eredmény kanonikus alakját is:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| (a) $(\sqrt{3}-i)(2-2\sqrt{3}i)$; | (d) $(\sqrt{3}-i)^{67}$; |
| (b) $(-2-2i)(-5+5i)$; | (e) $(1+i)^{1222}$; |
| (c) i^{14} ; | (f) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526}$. |

3.5. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

- | | | |
|---------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| (a) $\sqrt{9}$; | (e) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$; | (i) $\sqrt[4]{i}$; |
| (b) $\sqrt{-4}$; | (f) $\sqrt[3]{-8}$; | (j) $\sqrt[6]{64}$; |
| (c) $\sqrt{i}$; | (g) $\sqrt[3]{-8i}$; | (k) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$. |
| (d) $\sqrt{-16i}$; | (h) $\sqrt[3]{-8+8i}$; | |

3.6. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk Gauss-féle számsíkon a

- (a) harmadik (b) negyedik (c) hatodik (d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

Szorgalmi feladatok

3.7. Feladat. Oldjuk meg a $z^2 = -15 + 8i$ egyenletet kanonikus alakkal számolva.

3.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy nincs olyan z komplex szám, amelyre $|z| - z = i$.

3.9. Feladat. Az $ABCD_{\square}$ négyzet két csúcsa $A = 2 + i$ és $B = 4 - 2i$. Határozzuk meg a négyzet C és D csúcsait, ha azt is tudjuk, hogy $\text{Im}(A + B + C + D) < 0$.

3.10. Feladat. Tekintsük a $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto zi$ leképezést. A sík mely geometriai transzformációjának felel meg a φ leképezés? Határozzuk meg azt az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, amely segítségével megadható ez a transzformáció a síkon (ld. 2.2(k) feladat).

3.11. Feladat. Határozzuk meg a sík $(1, -2)$ vektorának $\frac{\pi}{3}$ szögű elforgatottját komplex számok segítségével.

3.12. Feladat. Számoljuk ki az $(1 + i)^{4k}$ értéket tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén binomiális tétellel és komplex számok segítségével is, majd írjuk fel a kapott azonosságokat.

3.13. Feladat. A $z^6 + z^3 + 1 = 0$ egyenletnek van olyan komplex megoldása, melynek argumentuma $\frac{\pi}{2}$ és π között van. Határozzuk meg ennek a megoldásnak az argumentumát.

3.14. Feladat. Számoljuk ki az n -edik egységgyökök összegét és szorzatát.