

2. feladatsor – Leképezések, permutációk

2.1. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1$
- (b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3^{x-1}$
- (c) $\alpha: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, x-1)$

2.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát, $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát és $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : |M| \neq 0\}$.)

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
- (d) $\delta = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
- (e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\varepsilon = \frac{4}{x}$
- (f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n\zeta = |n - 3| + 1$
- (g) $\eta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$
- (h) $\theta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x - 1, 1)$
- (i) $\iota: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$
- (j) $\kappa: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto zA, \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (k) $\mu: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, (a_{ij})_{3 \times 3} \mapsto a_{11}a_{22}a_{33}$
- (l) $\lambda: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto |A|, \text{ ahol } n \geq 2 \text{ természetes szám}$
- (m) $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^{2 \times 2}, n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$
- (n) $\xi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}, \text{ ahol } n \text{ egy tetszőleges természetes szám}$

2.3. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- (a) nem szürjektív,
- (b) szürjektív, de nem bijektív,
- (c) injektív, de nem bijektív,
- (d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

2.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x + 2)^2 - 4$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\gamma = (2x + 1)^2 - 1$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow (13, \infty), x\delta = x^2 + 6x + 13$

2.5. Feladat. Írjuk fel az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(a) \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(c) \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.6. Feladat. Adjuk meg a következő S_7 -beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

$$(a) \delta = (1\ 3\ 6)(2\ 7\ 5\ 4);$$

$$(b) \varepsilon = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4\ 5);$$

$$(c) \eta = (1\ 5\ 4\ 2\ 7\ 3).$$

2.7. Feladat. Adjuk meg a következő S_6 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

$$(a) (1\ 2\ 4\ 3)(1\ 5\ 2\ 3);$$

$$(b) (1\ 2\ 3\ 4)(3\ 4\ 6\ 1);$$

$$(c) (1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 5\ 4\ 6);$$

$$(d) (1\ 3\ 4\ 2)(5\ 6)(1\ 4\ 3\ 2).$$

2.8. Feladat. A 2.5. és a 2.6. feladatban bevezetett jelöléseket felhasználva adjuk meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(a) \alpha\beta; \quad (b) \beta\alpha; \quad (c) (\beta\alpha)^{-1}; \quad (d) \beta^2; \quad (e) \beta^{2013}; \quad (f) \alpha^8; \quad (g) \alpha\delta\beta.$$

2.9. Feladat. Adjuk meg a következő S_9 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(a) ((1\ 2\ 3)(4\ 5))^{15};$$

$$(b) ((1\ 2\ 3\ 4\ 6)(7\ 8))^{-1};$$

$$(c) ((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 8))^{26};$$

$$(d) ((1\ 2\ 4)^5(1\ 3\ 4))^{-4};$$

$$(e) ((1\ 2\ 4\ 3)^{-6}(1\ 5\ 4)^{13})^{-4};$$

$$(f) ((1\ 5\ 4\ 3\ 7\ 2)^9((2\ 9\ 3)(4\ 5\ 2\ 7))^{120}(4\ 8\ 1))^{-1}.$$

2.10. Feladat. Keressük meg azokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesülnek a következő összefüggések:

$$(a) (1\ 5\ 3)\sigma(6\ 2\ 1)(4\ 1\ 3) = (3\ 1\ 5);$$

$$(b) ((1\ 2\ 3\ 4)(7\ 3\ 8))^3\sigma(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1};$$

$$(c) (2\ 4\ 3\ 6)^{14}\sigma(1\ 2\ 3\ 5)^{-9} = (1\ 4\ 2\ 3)^{12}.$$

2.11. Feladat. Döntsük el, hogy párosak vagy páratlanok a 2.5. és 2.6. feladatban bevezetett $\alpha, \dots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk:

$$(a) \gamma\varepsilon; \quad (b) \alpha\varepsilon; \quad (c) \varepsilon^{1802}; \quad (d) \eta^{1913}; \quad (e) \eta^{1998}$$

2.12. Feladat. Számítsuk ki a permutációk segítségével megadott definíció alapján a következő determinánsok értékét.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

2.13. Feladat. Az $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mátrixról tudjuk, hogy $|A| = 20$. Felcseréljük A sorait az $(12)(4365)$ permutáció szerint, mennyi az így kapott új mátrix determinánsa?

Szorgalmi feladatok

2.14. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Határozzuk meg, hogy hány A -ból B -be menő leképezés, injektív leképezés, szürjektív leképezés és bijektív leképezés van.

2.15. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Határozzuk meg, hogy hány A -ból B -be menő szürjektív leképezés van.

2.16. Feladat. Adjuk meg úgy az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, hogy az $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v \mapsto vA$ leképezés az x -tengelyre való tükrözés legyen. Vizsgáljuk meg, injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e az α leképezés.

2.17. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

$$(a) (0; 1) \text{ és } (-2; 3) \qquad (b) (1; 6) \text{ és } (4; 7)$$

2.18. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

$$(a) (0; 1) \text{ és } \mathbb{R} \qquad (b) \mathbb{R} \text{ és } \mathbb{R}^+$$

2.19. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha: A \rightarrow B$ leképezés injektív, akkor valahányszor $\beta: C \rightarrow A$ és $\beta': C \rightarrow A$ olyan leképezések, hogy $\beta\alpha = \beta'\alpha$, mindannyiszor $\beta = \beta'$.

2.20. Feladat. Hány olyan $\sigma \in S_5$ permutáció van, amelyre

- (a) $|M_\sigma| = 0$;
- (b) $|M_\sigma| = 1$;
- (c) $|M_\sigma| = 2$;
- (d) $|M_\sigma| = 3$;
- (e) $|M_\sigma| = 4$;
- (f) $|M_\sigma| = 5$.

2.21. Feladat. Hányféleképpen táncolhat 6 házaspár úgy, hogy senki sem táncol a saját házastársával?

2.22. Feladat. Egy kártyakeverőgépbe betettünk 9 betűkártyát MATEKHÁZI sorrendben. A gép a keverés után a lapokat ZMKTIÁEAH sorrendben adta ki. Ezután a lapokat az első keverés utáni sorrendben újra beletettük a gépbe. A kártyakeverőgép a behelyezett 9 kártyát egy keverés során mindig ugyanúgy rendezi át. (Például a 4. helyen lévő lapot mindig a 7. helyre teszi.) Milyen sorrendben jöttek ki a lapok a második keverés után?

2.23. Feladat. Egy kártyakeverő gép egy lépésben a behelyezett kártyák sorrendjéhez képest mindig ugyanúgy rendezi át a lapokat. Betettük a 13 darab treff lapot növekvő sorrendben 2-estől ászig. A gép egyszer megkeverte a lapokat, az így kapott csomagot újra visszatettük, ezt a gép ismét megkeverte, majd az alábbi sorrendben adta ki a 13 lapot:

Bubi, 10, Király, 9, Ász, 4, 5, 2, 6, Dáma, 7, 3, 8.

Mi volt a lapok sorrendje az első keverés után?

2.24. Feladat. Legkevesebb hány tranzpozíció szorzatára bontható fel az $(12 \dots n)$ ciklus?

2.25. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a következő halmazok elemeiből S_n összes eleme előállítható (permutáció)szorzással (azaz generálják S_n -t):

- (a) $\{(1k) : k = 2, 3, \dots, n\}$;
- (b) $\{(12), (12 \dots n)\}$.