

1. feladatsor – Mátrix, determináns, lineáris egyenletrendszer

1.1. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B$, $3A$, B^T , BC , CA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1.2. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek: $2A$, $A + B$, $B + C^T$, BA , BC , CB , $AB + 2C^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3. Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$, számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

1.4. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \\ & \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(g)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{(h)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(i)} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 34 & -22 & 5 \\ -20 & 16 & -4 & 12 \\ -200 & 20 & 19 & 31 \\ 5 & -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.5. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

1.6. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

1.7. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

1.8. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét Gauss-elimináció segítségével:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.9. Feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Melyik egyenletrendszer megoldásánál használhattunk volna Cramer-szabályt?

(a)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 - x_2 + 8x_3 &= -3\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 &= 6 \\-3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 24\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}-3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= -8 \\2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 &= 10 \\x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\2x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 11 \\-5x_1 - 6x_2 + 13x_3 &= -14\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}a - b + u &= 1 \\a + c - v &= 2 \\b + v + w &= 3\end{aligned}$$

Szorgalmi feladatok

1.10. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely A -val felcserélhető, azaz $AB = BA$ teljesül!

1.11. Feladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n -edik hatványát ($n \in \mathbb{N}$).

1.12. Feladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n -edik hatványát ($n \in \mathbb{N}$).

1.13. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan 2×2 -es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

1.14. Feladat. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 60 & 84 \\ 210 & 140 \end{vmatrix}$ determináns értékét anélkül, hogy az $ad - bc$ képletet, illetve törteket használnánk.

1.15. Feladat. Legyen $n \geq 3$ természetes szám. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$ -es determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

1.16. Feladat. Legyen $n \geq 3$ természetes szám. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$ -es determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.17. Feladat. Legyen $n \geq 3$ természetes szám, és tekintsük azt az $n \times n$ -es determinánst, amelynek főátlójában minden elem γ , a többi helyen pedig δ áll. Számítsuk ki a determináns értékét.

1.18. Feladat. Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 &= a + 4 \end{aligned}$$

1.19. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= a \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= b \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= c \end{aligned}$$

1.20. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a valós paraméter.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1.21. Feladat. Létezik-e olyan m egyenletből álló n ismeretlenes valós egyenletrendszer, melyre

- a) $n > m$ és nincs megoldás;
- b) $m > n$ és pontosan egy megoldás van;
- c) $n > m$ és pontosan egy megoldás van;
- d) $n = m$ és végtelen sok megoldás van.

Ha létezik, adjunk rá példát, ha nem létezik bizonyítsuk!

1.22. Feladat. Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 2x_6 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer. Van-e olyan általános megoldása a fenti egyenletrendszernek, melyben a kötött ismeretlenek éppen

(a) x_2, x_4 és x_5 ?

(b) x_1, x_3 és x_5 ?

Adj meg olyan általános megoldást, melyben az x_1, x_3 és x_5 ismeretlenek a szabadok.

1.23. Feladat. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$ -es mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.24. Feladat. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$ -es mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$