

3. feladatsor – Számelmélet - Hatványozás modulo m

3.1. Feladat. A mai napon (2023. április 14-én) péntek van. Milyen nap lesz 7770017^{6664} nap múlva?

3.2. Feladat. Számoljuk ki az Euler-féle φ függvény következő értékeit.

$$(a) \varphi(20); \quad (b) \varphi(75); \quad (c) \varphi(88); \quad (d) \varphi(128); \quad (e) \varphi(360).$$

3.3. Feladat. Határozzuk meg, hogy az a szám milyen maradékot ad m -nel osztva.

$$(a) a = 3^{65}, m = 128; \quad (b) a = 19^{81}, m = 75; \quad (c) a = 63^{42}, m = 50; \\ (d) a = 42^{62}, m = 25; \quad (e) a = 27^{159}, m = 40; \quad (f) a = 4447^{2018}, m = 44.$$

3.4. Feladat. Keressünk primitív gyököt az m modulusra nézve.

$$(a) m = 26; \quad (b) m = 35; \quad (c) m = 17; \quad (d) m = 22; \quad (e) m = 19.$$

3.5. Feladat. Készítsünk indextáblázatot, és oldjuk meg a segítségével a kongruenciát.

$$(a) x^9 \equiv 8 \pmod{13}; \\ (b) 11x^8 \equiv 5 \pmod{13}; \\ (c) 3x^4 \equiv 4 \pmod{11}; \\ (d) 5x^6 \equiv 3 \pmod{11}; \\ (e) 10x^5 \equiv 1 \pmod{11}.$$

3.6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi Legendre-szimbólumokat.

$$(a) \left(\frac{7}{31}\right); \quad (b) \left(\frac{95}{137}\right); \quad (c) \left(\frac{96}{131}\right); \quad (d) \left(\frac{59}{107}\right); \quad (e) \left(\frac{101}{103}\right).$$

Szorgalmi feladatok

3.7. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

$$(a) 2\varphi(x) = x; \\ (b) \varphi(x) = x - 8.$$

3.8. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

$$(a) 3\varphi(x) = x; \\ (b) \varphi(x^2) = 2x.$$

3.9. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

3.10. Feladat. Határozzuk meg, hogy a $13^{321^{50}}$ szám milyen maradékot ad 87-tel osztva.

3.11. Feladat. Határozzuk meg, hogy a $91^{441^{222}}$ szám milyen maradékot ad 88-cal osztva.

3.12. Feladat. A mai napon (2023. április 10-én) hétfő van. Milyen nap lesz $712^{185^{937}}$ nap múlva?

3.13. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n \mid 2^{(n-1)!} - 1$.

3.14. Feladat. Számítsuk ki az alábbi Legendre-szimbólumokat.

$$(a) \left(\frac{141}{181}\right); \quad (b) \left(\frac{113}{151}\right).$$