2. feladatsor – Polinomok

MEGOLDÁSOK

2.1. Feladat megoldása. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $x + 1$;
(b) $x^2 + \overline{1}$
(c) $x^2 + 2x + 1$;
(d) $x^2 + 6x - 7$;
(e) $x^3 + x^2 + \overline{2}$
(f) $\overline{2}x^2 + \overline{1}$.

2.2. Feladat megoldása. Az egyenletek megoldása.

(a) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x + (x + 5)t$, $v = \frac{1}{4}x - (x + 1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;
(b) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2 + x + 1$,
általános: $u = x + (x^2 + 1)t$, $v = x^2 + x + 1 + (x^3 + x^2 + 1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$;
(c) Egy megoldás: $u_0 = 3x$, $v_0 = 2x^2 + 3x$,
általános: $u = 3x + (3x^2 + 3x + 3)t$, $v = 2x^2 + 3x + (2x^3 + 2)t$, $t \in \mathbb{Z}_5[x]$;
(d) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x$,
általános: $u = 1 + (x + 2)t$, $v = 2x + (2x^2 + x + 2)t$, $t \in \mathbb{Z}_3[x]$.

2.3. Feladat megoldása. A kongruenciák megoldása.

(a) $u \equiv \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;
(b) $u \equiv \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}$;
(c) nem létezik;
(d) $u \equiv x^2 + x + \overline{1}$.

2.4. Feladat megoldása.

(a) szorzat: $\overline{7}$, inverz: $\overline{6}$;
(b) összeg: $\overline{x^2}$, szorzat: $\overline{\overline{2}x}$;
(c) szorzat: $\overline{x^3 + x^2}$, inverz: $\overline{x}$;
(d) szorzat: $\overline{\overline{2}x^2 + \overline{2}}$, inverz: $\overline{\overline{2}x}$.

2.5. Feladat megoldása. Az együtthatók értéke:

(a) $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{13}{2}$;
(b) $a = -1$, $b = 4$;
(c) $a = -\frac{7}{18}$, $b = \frac{23}{18}$;
(d) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

2.6. Feladat megoldása. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

(a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
(b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
(c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
(d) háromszoros; $(x - \overline{2})^3(x + \overline{2})$.

2.7. Feladat megoldása. A polinomok komplex gyökei:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ \sqrt{2}-\sqrt{2}i$;
(b) $2, -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$;
(c) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},\ \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8},\ \cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8},\ \cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$;
(d) $2,\ 1+\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -2,\ -1-\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$;
(e) $2i,\ -\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}-i$;
(f) $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

2.8. Feladat megoldása. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) $x(x^2+3)(x^2-2)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $x(x^2+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett), $x(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(b) $(x-2)(x^2+2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $(x-2)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(c) $x^2(x+2)(x^2-2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(d) $(x^2+5)(x^2-5)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x^2+5)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett), $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-i\sqrt{5})(x+i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(e) $(x^2-3)(x^4+3x^2+9)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$ ($\mathbb{R}$ felett), $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x-\frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
(f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett).

2.9. Feladat megoldása. Az $f\in\mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összege (o) és szorzata (sz).

(a) $o=3,\ sz=-4$;
(b) $o=0,\ sz=2$;
(c) $o=-2,\ sz=0$;
(d) $o=0,\ sz=-5$;
(e) $o=\frac{4}{3},\ sz=-\frac{2}{3}$;
(f) $o=-\frac{3}{4},\ sz=\frac{1}{4}$.

2.10. Feladat megoldása. Egy minimális fokszámú valós együtthatós polinom:

(a) $(x-2)^2(x+1)(x-(2+i))(x-(2-i))=(x-2)^2(x+1)(x^2-4x+5)$;
(b) $(x-i)^3(x+i)^3(x-(3+i))(x-(3-i))=(x^2+1)^3(x^2-6x+10)$;
(c) $(x-(1+i))^3(x-(1-i))^3(x+2)^2(x-i)(x+i)=$ $=(x^2-2x+2)^3(x+2)^2(x^2+1)$.

2.11. Feladat megoldása. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(a) Rac. gyök: 2, $(x-2)(x^2+x+1)$;
(b) Rac. gyök: 1/2, $(x^2+1)(x^2-2)(2x-1)$;
(c) Rac. gyök: $1, -1/2$, $2(x-1)(2x+1)(x^2+2x+2)$.

2.12. Feladat megoldása. Az $f\in\mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p=3$;
(b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p=2$ vagy $p=5$;

(c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.

2.13. Feladat megoldása. $T[x]/\langle m\rangle$ testet alkot-e.

(a) igen, 4-elemű test;
(b) nem ($\overline{1}$ gyöke m-nek), 4-elemű gyűrű;
(c) igen, 9-elemű test;
(d) nem ($\overline{2}$ gyöke m-nek), 27-elemű gyűrű;
(e) igen, 27-elemű test;
(f) igen, 16-elemű test;
(g) nem ($x^2 + x + \overline{1}$ négyzete m);
(i) nem ($\mathbb{R}$ felett az irreducibilis polinomok legfelebb másodfokúak), komtinuum számosságú;
(j) nem ($\mathbb{R}$ felett az irreducibilis polinomok legfelebb másodfokúak), kontinuum számosságú;
(k) igen, kontinuum számosságú.

2.14. Feladat megoldása.

(a) x^2;
(b) $-x^2 + 8x - 4$;
(c) $x^2 + 3x - 4$;
(d) $-\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$.

2.15. Feladat megoldása. Az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értéke:

(a) $a = -2$, $b = 3$;
(b) $a = 2$, $b = 4$;
(c) $a = 3$, $b = 1$.

2.16. Feladat megoldása. A többszörös gyökök:

(a) $2, -1$;
(b) -1.