2. feladatsor – Polinomok

2.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1,\ g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1, \quad \mathbb{Q}[x];$
(b) $f = x^5 + x^4 + x^3 + \overline{1},\ g = x^4 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_2[x];$
(c) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3,\ g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2, \quad \mathbb{Q}[x];$
(d) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105,\ g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7, \quad \mathbb{Q}[x];$
(e) $f = x^5 + x + \overline{2},\ g = x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_3[x];$
(f) $f = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{2},\ g = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_5[x].$

2.2. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

(a) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x, \quad \mathbb{R}[x];$
(b) $(x^5 + x^4 + x^3 + \overline{1})u + (x^4 + \overline{1})v = x^2 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_2[x];$
(c) $(x^4 + x^3 + x + \overline{1})u + (x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^2 + x, \quad \mathbb{Z}_5[x];$
(d) $(x^5 + x + \overline{2})u + (x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^3 + x^2 + \overline{2}, \quad \mathbb{Z}_3[x].$

2.3. Feladat. Oldjuk meg az $fu \equiv g \pmod{m}$ kongruenciát, majd fogalmazzuk át a feladatot és a kapott eredményt a maradékosztály-gyűrűk nyelvére.

(a) $f = x - 1,\ g = x^2,\ m = x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x];$
(b) $f = x^2 + 2,\ g = x,\ m = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x];$
(c) $f = x^2 + 1,\ g = 1,\ m = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x];$
(d) $f = x^2 + \overline{1},\ g = \overline{1},\ m = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x].$

2.4. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a K maradékosztály-gyűrűben.

(a) $K = \mathbb{Z}_{17}; \quad \overline{16} \cdot \overline{10}, \quad \overline{3}^{-1};$
(b) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{2}\rangle; \quad \overline{x + \overline{2}} + \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}}, \quad \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}} \cdot \overline{x + \overline{2}};$
(c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + \overline{1}\rangle; \quad \overline{x^3 + x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{1}}, \quad \overline{x^3 + x^2}^{-1};$
(d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}\rangle; \quad \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{2}}, \quad \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}}^{-1}.$

2.5. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$-ben.

(a) $(x - 1)(x + 2) \mid ax^3 + x^2 + bx + 3;$
(b) $(x - 2)(x + 1) \mid ax^3 - x^2 + bx + 4;$
(c) $(x - 2)(x - 3) \mid ax^3 + bx^2 + x - 4;$
(d) $(x + 1)(x + 2) \mid x^3 + ax^2 + bx - 1.$

2.6. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

(a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9, \quad c = 3, \quad \mathbb{Q}[x];$
(b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54, \quad c = 3, \quad \mathbb{R}[x];$

(c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i, \quad c = i, \quad \mathbb{C}[x]$;
(d) $f = x^4 + \overline{2}x^3 + x + \overline{2}, \quad c = \overline{2}, \quad \mathbb{Z}_3[x]$.

2.7. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

(a) $x^4 + 16$;
(b) $x^3 - 8$;
(c) $x^4 - i$;
(d) $x^6 - 64$;
(e) $x^3 + 8i$;
(f) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

2.8. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) $x^5 + x^3 - 6x$;
(b) $x^3 - 8$;
(c) $x^5 + 8x^2$;
(d) $x^4 - 25$;
(e) $x^6 - 27$;
(f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

2.9. Feladat. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összegét és szorzatát. (Minden gyököt a multiplicitásának megfelelő számban vegyünk figyelembe.)

(a) $f = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 4$;
(b) $f = x^4 + 2x^2 - 3x + 2$;
(c) $f = x^{17} + 2x^{16} + 3x^5 - 4x^2 + 15x$;
(d) $f = x^{2021} + x^4 + 3x^2 - x + 5$;
(e) $f = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 6x + 2$;
(f) $f = 8x^7 + 6x^6 - 2x^3 + 7x - 2$.

2.10. Feladat. Adjunk meg minimális fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek

(a) a 2 kétszeres, a -1 és a $2 + i$ egyszeres gyöke;
(b) az i háromszoros, a $3 + i$ egyszeres gyöke;
(c) az $1 + i$ háromszoros, a -2 kétszeres, az i egyszeres gyöke.

2.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
(b) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;
(c) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

2.12. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
(b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
(c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.

2.13. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti m polinom esetén $T[x]/\langle m\rangle$ testet alkot-e. Mennyi az elemszáma/számossága?

(a) $T = \mathbb{Z}_2,\ m = x^2 + x + \overline{1}$;
(b) $T = \mathbb{Z}_2,\ m = x^2 + \overline{1}$;
(c) $T = \mathbb{Z}_3,\ m = x^2 + \overline{1}$;
(d) $T = \mathbb{Z}_3,\ m = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}$;
(e) $T = \mathbb{Z}_3,\ m = x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$;
(f) $T = \mathbb{Z}_2,\ m = x^4 + x^3 + \overline{1}$;
(g) $T = \mathbb{Z}_2,\ m = x^4 + x^2 + \overline{1}$;
(h) $T = \mathbb{R},\ m = x^{2023} + 2024x^{456} + x + 3$;
(i) $T = \mathbb{R},\ m = x^3 + x^2 + x + 21$;
(j) $T = \mathbb{R},\ m = x^2 + x + 2$.

2.14. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

(a) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$;
(b) $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$;
(c) $A(-2, -6)$, $B(1, 0)$, $C(3, 14)$;
(d) $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 4)$, $D(4, 0)$.

2.15. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$-ben.

(a) $(x-1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 2$;
(b) $(x+1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 3$;
(c) $(x+2)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 4$.

2.16. Feladat. Keressük meg a következő polinomok többszörös gyökeit.

(a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
(b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

Szorgalmi feladatok

2.17. Feladat. Az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben mely elemek az egységek, azaz azok a polinomok, amelyek minden polinomnak osztói? Igazoljuk is a sejtésünket.

2.18. Feladat. Adjuk meg azokat az $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomokat, amelyeknek legnagyobb közös osztója $x + \overline{1}$, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 3 maradékos osztást végeztünk, és minden hányados x volt.

2.19. Feladat. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomokra, amelyre $\operatorname{lnko}(f, g) = x^2 + 1$, és a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 4 maradékos osztást végeztünk, azaz a 3. osztásnál kaptuk a legutolsó nemnulla maradékot. Igazoljuk is!

2.20. Feladat. Adjuk meg az $a \in \mathbb{C}$ értékét úgy, hogy az $x^3 - (a+1)x + 2$ és az $x^2 - ax + 1$ komplex együtthatós polinomoknak legyen közös gyöke.

2.21. Feladat. Határozzuk meg az $x^n - 1$ és az $x^m - 1$ komplex együtthatós polinomok legnagyobb közös osztóját tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

2.22. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + x + 1 \mid x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ teljesül $\mathbb{C}[x]$-ben tetszőleges $k, m, n \in \mathbb{N}$ esetén.

2.23. Feladat. Határozzuk meg az $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ n-ed fokú nem konstans polinom gyökeinek négyzetösszegét a polinom együtthatóinak segítségével.

2.24. Feladat. Adjuk meg az $a,\ b$ együtthatókat úgy, hogy $(x-1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön.

2.25. Feladat. Adjuk meg az összes olyan $a \in \mathbb{C}$ együtthatót, amely esetén az $x^4 - 4x + a \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke.

2.26. Feladat. Legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ tetszőleges polinom. Hogyan lehet meghatározni azt a polinomot, amelyenek gyökei pontosan az f polinom többszörös gyökei, csak mindegyik egyszeres multiplicitással.