

1. feladatsor – Műveletek és algebrák

MEGOLDÁSOK

1.1. Feladat megoldása.

(a) igen; (b) nem; (c) nem; (d) igen; (e) nem; (f) igen; (g) nem.

1.2. Feladat megoldása.

- (a) A grupoid kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: id, az invertálható elemek halmaza: id, (12).
- (b) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 0, egységeleme: 1, az invertálható elemek halmaza: $\{1, -1\}$;
- (c) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: -1 , az invertálható elemek halmaza: $\{-1\}$;
- (d) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs.

1.3. Feladat megoldása.

- (a) A grupoid nem kommutatív, zéruselem nincs, a b elem egységelem, a b és c elemeknek van inverze: $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$;
- (b) A grupoid nem kommutatív, zéruselem nincs, az a elem egységelem, az a , b és c elemeknek van inverze: $a^{-1} = a$, $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$.

1.4. Feladat megoldása.

- (a) félcsoport; (b) monoid; (c) Abel-csoport; (d) Abel-csoport;
- (e) csoport; (f) monoid; (g) monoid; (h) Abel-csoport;
- (i) Abel-csoport; (j) monoid; (k) Abel-csoport; (l) monoid;
- (m) grupoid; (n) csoport; (o) monoid.

1.5. Feladat megoldása.

(a) 4; (b) 4; (c) 3; (d) ∞ ; (e) 12; (f) 4;
(g) 3; (h) 4; (i) 3; (j) 2; (k) 2; (l) 8.

1.6. Feladat megoldása.

(a) igen; (b) nem; (c) nem; (d) igen; (e) igen; (f) nem.

1.7. Feladat megoldása. $\mathbf{A} \cong \mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$; $0 \mapsto q$, $1 \mapsto r$, $2 \mapsto p$.

$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$; $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto -1$.

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$; $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto -1$, $2 \mapsto 0$.

1.8. Feladat megoldása.

- (a) izomorfak, pl. $u \mapsto \bar{3}$, $v \mapsto \bar{0}$, $x \mapsto \bar{1}$, $y \mapsto \bar{2}$;
- (b) nem izomorfak, egyik kancellatív, a másik nem;
- (c) izomorfak;
- (d) nem izomorfak;
- (e) nem izomorfak;
- (f) izomorfak.

1.9. Feladat megoldása.

(a) (3674);

- (b) (3 6 1 7 4 2 5);
- (c) a^2t, id ;
- (d) a^5t, a^{12} ;
- (e) $\bar{4}, \bar{14}$;
- (f) $\bar{7}, \bar{13}$;
- (g) $\bar{1}, \bar{10}$.

1.10. Feladat megoldása.

- (a) $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- (b) $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \mathbb{Z}_4$;
- (c) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$;
- (d) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$;
- (e) \mathbb{Z} ;
- (f) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$;
- (g) \mathbb{Z}_{15}^* ;
- (h) $\{\text{id}, a^3, a^6, a^9, a^2t, a^5t, a^8t, a^{11}t\} \cong D_4$;
- (i) $\{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \cong \mathbb{Z}_3$.

1.11. Feladat megoldása.

- (a) $\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$, $\bar{2}$ nem eleme;
- (b) $2 + H = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$, $-4 = 3(-2) + 2$ eleme;
- (c) $(3, 4) + H = \{(x + 3, x + 4) : x \in \mathbb{R}\}$, $(-8, -7) = (-11 + 3, -11 + 4)$ eleme;
- (d) $(2, -1) + H = \{(5x + 2, -2x - 1) : x \in \mathbb{Z}\}$, $(17, -5)$ nem eleme.

1.12. Feladat megoldása.

- (a) nem gyűrű; (b) integritástartomány; (c) test;
- (d) test; (e) test; (f) gyűrű;
- (g) gyűrű; (h) gyűrű; (i) gyűrű;
- (j) test; (k) integritástartomány.

1.13. Feladat megoldása.

- (a) $\bar{4}$; (b) $\bar{5}$; (c) $\bar{4}$; (d) $\bar{1}$.

1.14. Feladat megoldása.

- (a) $\bar{2}$; (b) $\bar{9}$; (c) $\bar{11}$; (d) nem végezhető el; (e) $\bar{14}$.