1. feladatsor – Műveletek és algebrák

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát, $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát, $\mathbb{R}^n$ az n komponensű valós vektorok halmazát, $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok halmazát, továbbá $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : |M| \neq 0\}$, azaz az $n \times n$-es invertálható valós mátrixok halmazát jelöli. Valamint jelölje B^A az A halmazból B halmazba menő leképzések halmazát, S_n pedig tetszőleges pozitív n egész esetén az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát.

1.1. Feladat. Művelet-e

(a) az S_n halmazon a szorzás;
(b) az összeadás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
(c) az osztás a $\mathbb{Q}$ halmazon;
(d) $GL_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok szorzása.
(e) $GL_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok összeadása.
(f) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
(g) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.

1.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

(a) $(S_2; \cdot)$;
(b) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot\,)$;
(c) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
(d) $(\{a, b, c\}; \circ\,)$, ahol $x \circ y = y$.

1.3. Feladat. Az alábbi művelettáblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

(a)

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	d	d	a	a

(b)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

1.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

(a) $(\mathbb{N}; +)$; (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; (c) $(\mathbb{Z}; +)$; (d) $(\mathbb{Q}; +)$;
(e) $(S_4; \cdot)$; (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
(i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; (j) $(A^A; \cdot)$; (k) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$; (l) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$;
(m) $(\mathbb{Z}; -)$; (n) $(GL_n(\mathbb{R}); \cdot)$; (o) $(\mathbb{C}; \cdot)$.

1.5. Feladat. Határozzuk meg a G csoportban a megadott elem rendjét.

(a) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;
(b) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i;
(c) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$;
(d) $G = Q \setminus \{0\}$, -2;
(e) $G = S_8$, $(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)$;
(f) $G = S_5$, $(1\,2\,4\,5)(2\,3\,4)$
(g) $G = \mathbb{Z}_6$, $\overline{2}$;
(h) $G = \mathbb{Z}_4;$, $\overline{3}$;
(i) $G = \mathbb{Z}_9^*$, $\overline{4}$;
(j) $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $\overline{5}$;
(k) $G = D_4$, $a^3 t$;
(l) $G = D_{24}$, a^9.

1.6. Feladat. Döntse el, hogy a G csoportban részcsoportot alkot-e a megadott H részhalmaz.

(a) $G = S_4$, $H = \{\mathrm{id}, (1\,3), (2\,4), (1\,3)(2\,4)\}$
(b) $G = D_6$, $H = \{\mathrm{id}, t, a^2, a^2 t\}$
(c) $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{N}$
(d) $G = \mathbb{C}^*$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
(e) $G = S_5$, $H = \{\mathrm{id}, (1\,3\,5), (1\,5\,3)\}$
(f) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_6^*$

1.7. Feladat. Az $\mathbf{A} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$, $\mathbf{B} = (\{a, b, c\}; *)$, $\mathbf{C} = (\{p, q, r\}; \square)$ és $\mathbf{D} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ grupoidok művelettáblázatai az alábbiak. Döntsük el, hogy mely grupoidok izomorfak. (Adjuk meg az izomorfizmusokhoz tartozó leképezésket.)

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\square$	p	q	r
p	p	p	p
q	p	q	r
r	p	r	q

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

1.8. Feladat. Döntsük el izomorfak-e a következő grupoidok. (A választ indokoljuk is.)

(a)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

és $\mathbb{Z}_4$;

(b)

$\circ$	α	β	γ	δ
α	δ	β	α	γ
β	β	β	β	β
γ	α	β	γ	δ
δ	γ	β	δ	δ

és $\mathbb{Z}_5^*$;

(c) D_3, S_3;
(d) D_4, $\mathbb{Z}_{15}^*$;
(e) A_4, $\mathbb{Z}_{13}^*$;
(f) $\mathbb{Z}_{13}^*$, $\mathbb{Z}_{12}$.

1.9. Feladat. Végezzük el a megadott G csoportban a kijelölt műveleteket. (S_n esetén adjuk meg idegen ciklusok szorzataként a permutációt, D_n-nél pedig a^k vagy $a^k t$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ alakban adjuk meg a műveletek eredményét.)

(a) $G = S_7$, $((1\,3\,4\,2)(2\,3\,7))^{126}(3\,4\,7\,6)^{-1}$;
(b) $G = S_8$, $(3\,4\,5)((7\,4\,5\,1)^{-1}(4\,2\,5\,6))^{83}$;
(c) $G = D_8$, $a^{22}t \cdot a^{12}$, $(a^3ta)^4$
(d) $G = D_{15}$, $a^{23}t \cdot a^{18}$, $(at \cdot a^{-5}t)^{-3}$;
(e) $G = \mathbb{Z}_{17}$, $\overline{9} + \overline{12}$, $\overline{9} - \overline{12}$;
(f) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $\overline{2} \cdot \overline{11}$, $\frac{\overline{8}}{\overline{11}}$;
(g) $G = \mathbb{Z}_{13}^*$, $\overline{6} \cdot \overline{11}$, $\frac{\overline{4}}{\overline{3}}$.

1.10. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\overline{2}\}$; (b) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\overline{3}\}$; (c) $G = \mathbb{Z}_6$, $A = \{\overline{2}\}$;
(d) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $A = \{\overline{8}, \overline{10}\}$; (e) $G = \mathbb{Q};$, $A = \mathbb{N}$; (f) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A = \mathbb{Q}^-$;
(g) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $A = \{\overline{2}, \overline{11}\}$; (h) D_{12}, $A = \{a^3, a^2t\}$; (i) $G = S_4$, $A = \{(1\,2\,3)\}$.

1.11. Feladat. Legyen G csoport, H részcsoport és $a, b \in G$. Határozzuk meg az a elem H szerinti baloldali mellékosztályát, és döntsük el, hogy eleme-e ennek a mellékosztálynak a b elem.

(a) $G = (\mathbb{Z}_6; +)$, $H = [\overline{3}]$, $a = \overline{1}$, $b = \overline{2}$;
(b) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $H = \{3k \colon k \in \mathbb{Z}\}$, $a = 2$, $b = -4$;
(c) $G = (\mathbb{R}^2; +)$, $H = \{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$, $a = (3, 4)$, $b = (-8, -7)$;
(d) $G = (\mathbb{Z}^2; +)$, $H = \{(5x, -2x) \colon x \in \mathbb{Z}\}$, $a = (2, -1)$, $b = (17, -5)$.

1.12. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet az alábbiakban megadott algebrák közül? (A legszűkebb struktúrát adjuk meg.)

(a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
(e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3\times 3}; +; \cdot)$ (h) $(\mathbb{Z}^{2\times 2}; +; \cdot)$;
(i) $(\mathbb{Z}_4; +; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (k) $(\mathbb{Z}[i]; +; \cdot)$.

1.13. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ testben.

(a) $\overline{9} + \overline{12}$; (b) $\overline{2} \cdot \overline{11}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{9}}$; (d) $\overline{16}^{20}$.

1.14. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

(a) $\overline{8} + \overline{9}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{8}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{7}}$; (d) $\frac{\overline{1}}{\overline{5}}$; (e) $\overline{14}^{11}$.

Szorgalmi feladatok

1.15. Feladat. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható az $A = \{a, b\}$ halmazon, amellyel A grupoidot, monoidot, csoportot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelettáblázatuk nem egyezik meg.)

1.16. Feladat. Legyen az A halmaz n-elemű. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható A-n, amellyel A grupoidot, kommutatív grupoidot, egységelemes grupoidot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelettáblázatuk nem egyezik meg.)

1.17. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \cdot)$ grupoidot, ahol $\cdot$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

1.18. Feladat. Igaz-e minden A nem üres halmaz és minden asszociatív $\circ : A \times A \to A$ művelet esetén, hogy ha minden $x, y \in A$-ra teljesül az $x \circ y \circ y = x$ egyenlőség, akkor $\circ$ kommutatív?

1.19. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van olyan elem, melynek a négyzete önmaga. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

1.20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy csoport minden elemének az egységelem a négyzete, akkor a csoport kommutatív.

1.21. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

1.22. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet definiálni a műveleteket az $A = \{a, b\}$ halmazon, hogy A a műveletekkel testet alkosson.