

MBNK13E: Hálók
(előadásvázlat, 2025. május 6.)
Kátai-Urbán Kamilla

1. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz. Az $a, b \in A$ elemeknek $c \in A$ **felső korlátja**, ha $a \leq c$ és $b \leq c$. Az a, b elemeknek $d \in A$ **legkisebb felső korlátja**, ha d felső korlát, és a, b minden c felső korlátjára $d \leq c$. Duális módon definiálhatjuk a **alsó korlátot** és a **legnagyobb alsó korlátot**.

2. Megjegyzés. Az, hogy a (legnagyobb) alsó korlátot a (legkisebb) felső korláthoz képest duális módon definiáljuk, azt jelenti, hogy a rendezést a „feje tetjére állítjuk”, azaz a $\leq$ helyett $\geq$ -t írunk.

3. Példa. Az alábbi ábrán látható az első részbenrendezésben az 1, 2 elemeknek csak egy felső korlátjuk van, ami a legkisebb is egyben, de nincsen alsó korlátjuk. A második részbenrendezésben a 4, 5 elemeknek két felső korlátjuk van, de nincsen legkisebb felső korlátjuk.

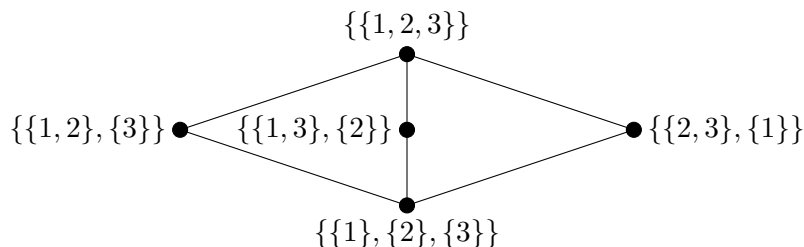


4. Tétel. Tetszőleges részbenrendezett halmaz bármely két elemének legfeljebb csak egy legkisebb felső korlátja (legnagyobb alsó korlátja) van.

5. Definíció. Az $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz **hálószerűen rendezett**, ha tetszőleges $a, b \in A$ elemeknek van legkisebb felső korlátjuk, melyet $a \vee b$ -vel jelölünk és az a, b elemek **egyesítésnek** nevezzük, illetve legnagyobb alsó korlátjuk, melyet $a \wedge b$ -vel jelölünk és az a, b elemek **metszetnek** nevezzük.

6. Példa. Az előző példában szereplő részbenrendezések nem hálószerűen rendezettek. Az $(\mathbb{N}_0; |)$ hálószerűen rendezett halmaz, amelyben az egyesítés a legkisebb közös többszörös és a metszet a legnagyobb közös osztó. Az $(\mathbb{R}; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol az egyesítés a maximum és a metszet a minimum. A $(\mathcal{P}(U); \subseteq)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol az egyesítés az unió, a metszet pedig a halmazelméleti metszet. Egy csoport összes részcsoportjának halmaza a $\subseteq$ -ra nézve hálószerűen rendezett halmaz, ahol két részcsoport egyesítése az általuk generált részcsoport, a metszete pedig a halmazelméleti metszet.

7. Példa. Egy rögzített alaphalmazon az ekvivalenciarelációk halmaza a tartalmazásra nézve hálószerűen rendezett, ahol a metszet a halmazelméleti metszet, és az egyesítés a halmazelméleti unió tranzitív lezártja. Az $\{1, 2, 3\}$ alaphalmaz öt ekvivalenciarelációjának részbenrendezése a következő (az ekvivalenciarelációk helyett a megfelelő osztályozások vannak feltüntetve):



8. Definíció. Legyen $(A; \circ)$ grupoid. A **idempotens**, ha tetszőleges $a \in A$ esetén $a \circ a = a$.

9. Definíció. Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozós művelet az A halmazon. A **abszorptív** a $\star$ -ra nézve, ha bármely $a, b \in A$ esetén $a \circ (a \star b) = a$ és $(a \star b) \circ a = a$ teljesül.

10. Tétel. Legyen $(A; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor

- (1) a $\wedge$ és $\vee$ műveletek idempotensek, kommutatívák, és asszociatívák;
- (2) $\wedge$ abszorptív az $\vee$ -re és $\vee$ abszorptív a $\wedge$ -re;

(3) $a \leq b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \wedge b = a$.

11. Definíció. Az $(A; \wedge, \vee)$ algebrát **hálónak** nevezzük, ha a kétváltozós $\wedge$ és $\vee$ műveletek idempotensek, kommutatívak, és asszociatívak, illetve kölcsönösen abszorptívak egymásra.

12. Példa. $(\mathbb{N}_0; \text{lnko}, \text{lkkt})$, $(\mathbb{R}; \min, \max)$, $(\mathbb{R}; \max, \min)$ és $(\mathcal{P}(U); \cap, \cup)$ hálók.

13. Tétel. Ha adott az $(A; \wedge, \vee)$ háló, akkor az

$$a \leq b \iff a \wedge b = a$$

feltétel által definiált $\leq$ relációval $(A; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz, amelyben $a, b \in A$ legkisebb felső korlátja $a \vee b$ és legnagyobb alsó korlátja $a \wedge b$.

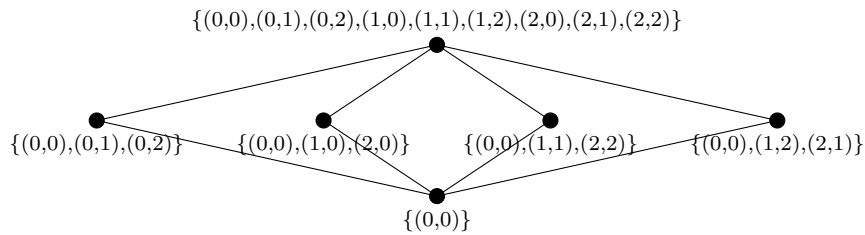
14.* Tétel. Adott alaphalmazon a hálószerűen rendezett halmazok és a hálók természetes módon (az előző két tétel szerint) megfeleltethetők egymásnak.

15. Példa.

hálószerűen rendezett halmaz	háló
$(\mathbb{N}_0;)$	$(\mathbb{N}_0; \text{lnko}, \text{lkkt})$
$(\mathbb{R}; \leq)$	$(\mathbb{R}; \min, \max)$
$(\mathbb{R}; \geq)$	$(\mathbb{R}; \max, \min)$
$(\mathcal{P}(U); \subseteq)$	$(\mathcal{P}(U); \cap, \cup)$

16. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ alterei a tartalmazásra nézve hálószerűen rendezett halmazt alkotnak. Ha $U, V \leq \mathbb{R}^n$ két altér, akkor metszetük $U \cap V$ és egyesítésük $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$.

17.* Példa. A $\mathbb{Z}_3$ test feletti 2-dimenziós $\mathbb{Z}_3^2$ vektortér altereinek hálója a következő:



$\mathbb{Z}_2^3$ altereinek Hasse-diagrammja már lényegesen bonyolultabb (1 db 0-dimenziós, 7 db 1-dimenziós, 7 db 2-dimenziós és 1 db 3-dimenziós altér van):

