
ALGERBA ÉS SZÁMELMÉLET

MBNK13G

3. FELADATSOR

SZÁMELMÉLET - HATVÁNYOZÁS MODULO m

3.1. Feladat. A mai napon (2025. április 11-én) péntek van. Milyen nap lesz 7770017^{6664} nap múlva?

MEGOLDÁS. kedd

3.2. Feladat. Számoljuk ki az Euler-féle φ függvény következő értékeit.

- (a) $\varphi(20)$; (b) $\varphi(75)$; (c) $\varphi(88)$; (d) $\varphi(128)$; (e) $\varphi(360)$.

MEGOLDÁS.

- (a) 8; (b) 40; (c) 40; (d) 64; (e) 96.

3.3. Feladat. Határozzuk meg, hogy az a szám milyen maradékot ad m -nel osztva.

- (a) $a = 3^{65}$, $m = 128$; (b) $a = 19^{81}$, $m = 75$; (c) $a = 63^{42}$, $m = 50$;
(d) $a = 42^{62}$, $m = 25$; (e) $a = 27^{159}$, $m = 40$; (f) $a = 4447^{2018}$, $m = 44$.

MEGOLDÁS.

- (a) 3; (b) 19; (c) 19; (d) 14; (e) 3; (f) 5.

3.4. Feladat. Keressünk primitív gyököt az m modulusra nézve.

- (a) $m = 26$; (b) $m = 35$; (c) $m = 17$; (d) $m = 22$; (e) $m = 19$.

MEGOLDÁS.

- (a) 7, 11, 15, 19;
(b) nincs;
(c) 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14;
(d) 7, 13, 17, 19;
(e) 2, 3, 10, 13, 14, 15.

3.5. Feladat. Készítsünk indextáblázatot, és oldjuk meg a segítségével a kongruenciát.

- (a) $x^9 \equiv 8 \pmod{13}$;
(b) $11x^8 \equiv 5 \pmod{13}$;
(c) $3x^4 \equiv 4 \pmod{11}$;
(d) $5x^6 \equiv 3 \pmod{11}$;
(e) $10x^5 \equiv 1 \pmod{11}$.

MEGOLDÁS. Indextáblázat a $g = 2$ primitív gyökhöz modulo 11:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{ind}_g a$	10	1	8	2	4	9	7	3	6	5

Indextáblázat a $g = 2$ primitív gyökhöz modulo 13:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{ind}_g a$	12	1	4	2	9	5	11	3	8	10	7	6

- (a) $x \equiv 7, 8, 11 \pmod{13}$;
- (b) nincs megoldása;
- (c) $x \equiv 2, 9 \pmod{11}$;
- (d) $x \equiv 5, 6 \pmod{11}$;
- (e) $x \equiv 2, 6, 7, 8, 10 \pmod{11}$

3.6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi Legendre-szimbólumokat.

$$(a) \left(\frac{7}{31}\right); \quad (b) \left(\frac{95}{137}\right); \quad (c) \left(\frac{96}{131}\right); \quad (d) \left(\frac{59}{107}\right); \quad (e) \left(\frac{101}{103}\right).$$

MEGOLDÁS.

$$(a) 1; \quad (b) -1; \quad (c) 1; \quad (d) -1; \quad (e) -1.$$

SZORGALMI FELADATOK

3.7. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

- (a) $2\varphi(x) = x$;
- (b) $\varphi(x) = x - 8$.

3.8. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

- (a) $3\varphi(x) = x$;
- (b) $\varphi(x^2) = 2x$.

3.9. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

3.10. Feladat. Határozzuk meg, hogy a $13^{(321^{50})}$ szám milyen maradékot ad 87-tel osztva.

3.11. Feladat. Határozzuk meg, hogy a $91^{(441^{222})}$ szám milyen maradékot ad 88-cal osztva.

3.12. Feladat. Mennyit ad maradékul a $80^{(111^{50})}$ szám 53-mal osztva?

3.13. Feladat. A mai napon (2025. április 28-án) hétfő van. Milyen nap lesz $712^{(185^{937})}$ nap múlva?

3.14. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n \mid 2^{(n-1)!} - 1$.

3.15. Feladat. Mennyit ad maradékul a 99 egyesből álló $111 \cdots 111$ szám 7-tel osztva?

3.16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az n , $n^8 - 1$ és $n^8 + 1$ számok valamelyike osztható 17-tel.

3.17. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\text{lnko}(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül.

3.18. Feladat. Igazoljuk, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

3.19. Feladat. Legyen p és q két különböző prímszám. Mutassuk meg, hogy $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

3.20. Feladat. Legyen p páratlan prímszám. Lehetséges-e, hogy két modulo p primitív gyök szorzata is primitív gyök?

3.21. Feladat. Melyek azok a p és q prímszámok, amelyekre $p \mid q^p + 1$ és $q \mid p^q + 1$?

3.22. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van $99 \dots 99$ alakú többszöröse.

3.23. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.