
ALGERBA ÉS SZÁMELMÉLET

MBNK13G

2. FELADATSOR

POLINOMOK

2.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1}$, $g = x^4 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3$, $g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (d) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105$, $g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (e) $f = x^5 + x + \bar{2}$, $g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_3[x]$;
- (f) $f = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + x + \bar{2}$, $g = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

2.2. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x$, $\mathbb{R}[x]$;
- (b) $(x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1})u + (x^4 + \bar{1})v = x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $(x^4 + x^3 + x + \bar{1})u + (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^2 + x$, $\mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) $(x^5 + x + \bar{2})u + (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^3 + x^2 + \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

2.3. Feladat. Oldjuk meg az $fu \equiv g \pmod{m}$ kongruenciát, majd fogalmazzuk át a feladatot és a kapott eredményt a maradékosztály-gyűrűk nyelvére.

- (a) $f = x - 1$, $g = x^2$, $m = x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^2 + 2$, $g = x$, $m = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$;
- (c) $f = x^2 + 1$, $g = 1$, $m = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$;
- (d) $f = x^2 + \bar{1}$, $g = \bar{1}$, $m = x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- (e) $f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}$, $g = \bar{1}$, $m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$;
- (f) $f = \bar{3}x^2 + \bar{2}$, $g = \bar{0}$, $m = x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$;
- (g) $f = \bar{3}x^2 + \bar{2}$, $g = \bar{1}$, $m = x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

2.4. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a K maradékosztály-gyűrűben.

- (a) $K = \mathbb{Z}_{17}$; $\overline{16} \cdot \overline{10}$, $\overline{3}^{-1}$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{2} \rangle$; $\overline{x + \bar{2} + x^2 + \bar{2}x + \bar{1}}$, $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x + \bar{2}}$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + \bar{1} \rangle$; $\overline{x^3 + x + \bar{1} \cdot x^2 + \bar{1}}$, $\overline{x^3 + x^2}^{-1}$;
- (d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{1} \rangle$; $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x^2 + \bar{2}}$, $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1}}^{-1}$.

2.5. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x-1)(x+2) \mid ax^3 + x^2 + bx + 3$;
- (b) $(x-2)(x+1) \mid ax^3 - x^2 + bx + 4$;
- (c) $(x-2)(x-3) \mid ax^3 + bx^2 + x - 4$;
- (d) $(x+1)(x+2) \mid x^3 + ax^2 + bx - 1$.

2.6. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

- (a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, $c = 3$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$, $c = 3$, $\mathbb{R}[x]$;
- (c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i$, $c = i$, $\mathbb{C}[x]$;
- (d) $f = x^4 + \bar{2}x^3 + x + \bar{2}$, $c = \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

2.7. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, mely illeszkedik a következő pontokra:

- (a) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$;
- (b) $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$;
- (c) $A(-2, -6)$, $B(1, 0)$, $C(3, 14)$;
- (d) $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 4)$, $D(4, 0)$.

2.8. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x^6 + \bar{3}x^4 - x^3 + \bar{2}x^2 + x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (c) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $x^5 + x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$

2.9. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x^5 + x^3 - 6x$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^5 + 8x^2$;
- (d) $x^4 - 25$;
- (e) $x^6 - 27$;
- (f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

2.10. Feladat. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összegét és szorzatát. (Minden gyököt a multiplicitásának megfelelő számban vegyünk figyelembe.)

- (a) $f = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 4$;
- (b) $f = x^4 + 2x^2 - 3x + 2$;
- (c) $f = x^{17} + 2x^{16} + 3x^5 - 4x^2 + 15x$;
- (d) $f = x^{2021} + x^4 + 3x^2 - x + 5$;
- (e) $f = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 6x + 2$;

(f) $f = 8x^7 + 6x^6 - 2x^3 + 7x - 2$.

2.11. Feladat. Adjunk meg minimális fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek

- (a) a 2 kétszeres, a -1 és a $2 + i$ egyszeres gyöke;
- (b) az i háromszoros, a $3 + i$ egyszeres gyöke;
- (d) az $1 + i$ háromszoros, a -2 kétszeres, az i egyszeres gyöke.

2.12. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
- (b) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;
- (c) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

2.13. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
- (b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
- (c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.

2.14. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti m polinom esetén $T[x]/\langle m \rangle$ testet alkot-e. Mennyi az elemszáma/számossága?

- (a) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^2 + x + \bar{1}$;
- (b) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^2 + \bar{1}$;
- (c) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^2 + \bar{1}$;
- (d) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}$;
- (e) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$;
- (f) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^4 + x^3 + \bar{1}$;
- (g) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^4 + x^2 + \bar{1}$;
- (h) $T = \mathbb{R}$, $m = x^{2023} + 2024x^{456} + x + 3$;
- (i) $T = \mathbb{R}$, $m = x^3 + x^2 + x + 21$;
- (j) $T = \mathbb{R}$, $m = x^2 + x + 2$.

2.15. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x - 1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 2$;
- (b) $(x + 1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 3$;
- (c) $(x + 2)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 4$.

2.16. Feladat. Keressük meg a következő polinomok többszörös gyökeit.

- (a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
- (b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

SZORGALMI FELADATOK

2.17. Feladat. Adjuk meg azokat az $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomokat, amelyeknek legnagyobb közös osztója $x+1$, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 3 maradékos osztást végeztünk, és minden hányados x volt.

2.18. Feladat. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomokra, amelyre $\text{lko}(f, g) = x^2 + 1$, és a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 4 maradékos osztást végeztünk, azaz a 3. osztásnál kaptuk a legutolsó nemnulla maradékot. Igazoljuk is!

2.19. Feladat. Adjuk meg az $a \in \mathbb{C}$ értékét úgy, hogy az $x^3 - (a+1)x + 2$ és az $x^2 - ax + 1$ komplex együtthatós polinomoknak legyen közös gyöke.

2.20. Feladat. Határozzuk meg az $x^n - 1$ és az $x^m - 1$ komplex együtthatós polinomok legnagyobb közös osztóját tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

2.21. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + x + 1 \mid x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ teljesül $\mathbb{C}[x]$ -ben tetszőleges $k, m, n \in \mathbb{N}$ esetén.

2.22. Feladat.

2.23. Feladat. Határozzuk meg az $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ n -ed fokú nem konstans polinom gyökeinek négyzetösszegét a polinom együtthatóinak segítségével.

2.24. Feladat. Adjuk meg az a, b együtthatókat úgy, hogy $(x-1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön.

2.25. Feladat. Adjuk meg az összes olyan $a \in \mathbb{C}$ együtthatót, amely esetén az $x^4 - 4x + a \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke.

2.26. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi gyűrűaxiómából.

2.27. Feladat. Legyen $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ megoldása az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek, ahol p és q egész számok. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz integritástománt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

2.28. Feladat. A *duális számokat* a komplex számokhoz hasonlóan definiáljuk, de itt a „képzetes egység” négyzete nem -1 , hanem 0 . Tehát $\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon : a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol ε olyan szimbólum, amelyre $\varepsilon^2 = 0$. (Mi lehet ennek az értelme? Miért pont ε -t használunk?) Mutassuk meg, hogy a duális számok (a természetes módon definiált összeadással és szorzással) kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak. Határozzuk meg a $\mathbb{D}$ gyűrű zérusosztóit és egységeit.

2.29. Feladat. Defináljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

2.30. Feladat. Defináljunk egy újfajta „összeadást” a pozitív valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a \cdot b$. Adjunk meg olyan $\odot$ „szorzást”, amelyre $(\mathbb{R}^+; \oplus, \odot)$ test.

2.31. Feladat. Mennyi lehet egy véges test összes elemének összege?

2.32. Feladat. Számítsuk ki az $(x-1)(x-2)\cdots(x-p-1) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x^{p-1} , x^{p-2} , x^{p-3} és x^0 együtthatóját, ahol $p \geq 5$ prímszám.

2.33. Feladat. Oldjuk meg az $(x^3 + x^2)u + (x^3 + x^2 + x)v + (x^3 + 1)w = 1$ egyenletet a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

2.34. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges K test és tetszőleges $a_0, \dots, a_n \in T$, $a_0, a_n \neq 0$ elemek esetén az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ is az.

2.35. Feladat. Adjuk meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

2.36. Feladat. Adjuk meg az $x^5 + x^3 + ax^2 + a \in T[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol $T = \{0, 1, a, b\}$ a négyelemű test.

2.37. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + 1 \mid x^{2008} - 23x^{1922} + 13x^{600} + 8$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben. (Útmutatás: használjuk Bézout tételét vagy magában a $\mathbb{Z}_p$ testben, vagy annak egy alkalmas bővítésében.)

2.38. Feladat. Adja meg az $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol p tetszőleges prímszám. (Útmutatás: térjünk át az $y = x - 1$ határozatlanra.)

2.39. Feladat. Mely komplex együtthatós polinomok oszthatók a saját deriváltjukkal?

2.40. Feladat. Keressünk egy ± 1 -től különböző egységet a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

2.41. Feladat. Határozzuk meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

2.42. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden véges integritástartomány test.

2.43. Feladat. Mely n pozitív egészekre osztható az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinommal?

2.44. Feladat. Legyen f a $(k, (-1)^k)$, $k = 0, \dots, 9$ pontokra illesztett interpolációs polinom. Mennyi $f(10)$ értéke?

2.45. Feladat. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ az n -edik egységgyökök, és legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ az $(\varepsilon_0, y_0), (\varepsilon_1, y_1), \dots, (\varepsilon_{n-1}, y_{n-1})$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom. Igazoljuk, hogy $f(0)$ éppen az $y_0, \dots, y_{n-1}$ számok átlaga.

2.46. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), \dots, (n+1, a_{n+1})$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy legfeljebb n -edfokú polinomfüggvény grafikonjára, ha

$$\binom{n+1}{0}a_0 - \binom{n+1}{1}a_1 + \binom{n+1}{2}a_2 - \dots + (-1)^k \binom{n+1}{k}a_k + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1}a_{n+1} = 0.$$

2.47. Feladat. Mutassa meg, hogy egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom akkor és csak akkor vesz fel egész értéket minden egész helyen, ha előáll $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-(k-1))}{k!}$ alakú polinomok egész együtthatós lineáris kombinációjaként.

2.48. Feladat. Határozzuk meg az egységkörbe írt szabályos n -szög egy csúcsából kiinduló átlói hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból $n-1$ átló indul ki.)

2.49. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz nem zárt a szorzásra.

2.50. Feladat. Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan 101-edfokú polinom, amely legalább 101 egész számra ± 1 értéket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

2.51. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f = x^n + ax + p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett bármely $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ és p prímszám esetén, ha $p > |a| + 1$. (Útmutatás: Először mutassa meg, hogy f minden α gyökére $|\alpha| > 1$.)

2.52. Feladat. Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan főpolinom, melynek konstans tagja nem nulla (azaz $f(0) \neq 0$). Tegyük fel, hogy f -nek egyetlen komplex gyöke van az egységkörön kívül, az összes többi gyöke az egységkör belsejében helyezkedik el (a körvonalon nincs egy gyök se). Bizonyítsuk be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

2.53. Feladat. Legyenek az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei olyan páronként különböző komplex számok, amelyek konvex n -szöget alkotnak a komplex számsíkon. Bizonyítsuk be, hogy f' gyökei csak ennek a sokszögnek a belsejében vagy határán helyezkedhetnek el.

2.54. Feladat. (Catan telepesei alternatív dobókockákkal.) Gyártsunk le két (szabályos, 6 oldalú) dobókockát, úgy hogy

- mindkét dobókocka minden oldalán pozitív egész számú pötty található,
- a dobókockák különböznek a hagyományos dobókockáktól, és
- ha a két kockával együtt dobunk, akkor a dobások együttes értéke éppen olyan eloszlású mintha két hagyományos dobókockával dobnánk.