

MTN212: Polinomok
(előadás vázlat, 2022. május 2.)

Kátai-Urbán Kamilla, Maróti Miklós, Waldhauser Tamás

1.* Tétel. Tetszőleges kommutatív, egységelemes R gyűrűben teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (1) $(a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$ (általános disztributivitás),
- (2) $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}$ (binomiális tétel).

2. Definíció. A T test fölötti egyhatározatlanú polinomok az

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (a_i \in T)$$

formális kifejezések, amelyek halmazát $T[x]$ -el jelöljük ($n \in \mathbb{N}_0$). Ha $a_{i+1} = a_{i+2} = \dots = a_n = 0$, akkor az $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ és $a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i$ polinomokat egyenlőknek tekintjük (tehát a zéró együttthatós tagokat figyelmen kívül hagyjuk). A $c \in T$ elemeket **konstans polinomoknak** hívjuk.

3. Definíció. Legyen T test. Az $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in T[x]$ polinom **polinomfüggvényén** az

$$f(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i \quad (c \in T)$$

képlet szerint definiált $f(x) : T \rightarrow T$ leképezést értjük.

4. Példa. A $\mathbb{Z}_2$ test feletti $f = \bar{0}$ és $g = x + x^2$ polinomokra $f \neq g$ de $f(x) = g(x)$. Azonban tetszőleges $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomokra $f = g$ akkor és csak akkor, ha $f(x) = g(x)$.

5. Definíció. Legyen T tetszőleges test és

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in T[x], \quad g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in T[x].$$

Az f és g polinomok **összegén** az

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)x^i,$$

polinomot értjük, ahol $a_i = 0$, illetve $b_i = 0$ értendő, ha $i > n$, illetve $i > m$. Az f és g **szorzatán** az

$$fg = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

polinomot értjük.

6. Tétel. Tetszőleges T test esetén $T[x]$ kommutatív egységelemes gyűrűt alkot az előbb definiált műveletekkel, amit a **T test feletti egyhatározatlanú polinomgyűrűnek** hívunk.

7. Definíció. Ha az $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in T[x]$ polinomban $a_n \neq 0$, akkor az n számot az f polinom **fokszámának** és az a_n elemet az f polinom **főegyütthatójának** hívjuk. Az f polinomot **főpolinomnak** nevezzük, ha f főegyütthatója $1 \in T$. Tehát a 0 polinomnak nincsen fokszáma (se főegyütthatója), de kényelmes lesz bevezetni a következő jelölést:

$$\deg f = \begin{cases} f \text{ fokszáma,} & \text{ha } f \neq 0, \\ -1, & \text{ha } f = 0. \end{cases}$$

8. Tétel. Legyen T tetszőleges test és $f, g \in T[x]$ nemzéró polinomok. Ekkor

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g) \quad \text{és} \quad \deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

9. Definíció. Az R gyűrűt **zérusosztómentesnek** nevezzük, ha bármely két 0-tól különböző elem szorzata 0-tól különböző.

10. Példa. A testek zérusosztómentes gyűrűt alkotnak. NEM zérusosztómentes gyűrű például a $\mathbb{Z}_6$, ugyanis $2 \cdot 3 = \bar{0}$.

11. Következmény. Tetszőleges T test esetén $T[x]$ zérusosztómentes.

12. Definíció. Legyen T tetszőleges test és $f, g \in T[x]$. Azt mondjuk, hogy f osztója g -nek, vagy g többszöröse f -nek, és azt írjuk, hogy $f \mid g$, ha van olyan $k \in T[x]$ polinom, amelyre $fk = g$.

13. Definíció. Tetszőleges T test feletti $T[x]$ polinomgyűrű esetén **egységeknek** nevezzük azokat a polinomokat, amelyek tetszőleges polinomnak osztói.

14. Tétel. Tetszőleges T test feletti $T[x]$ polinomgyűrű esetén az egységek a nemnulla konstans polinomok ($c \in T \setminus \{0\}$).

15. Tétel. Tetszőleges T test feletti $T[x]$ polinomgyűrűben teljesülnek a következő oszthatósági tulajdonságok, bármely $f, g, h \in T[x]$:

- (1) $f \mid f$,
- (2) ha $f \mid g$ és $g \mid h$, akkor $f \mid h$,
- (3) $f \mid g$ és $g \mid f$ akkor és csak akkor, ha $f = cg$ valamely $c \in T \setminus \{0\}$ elemre,
- (4) $f \mid 0$,
- (5) $f \mid 1$ akkor és csak akkor, ha $f \in T \setminus \{0\}$,
- (6) $0 \mid f$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$,
- (7) ha $f \mid g$ és $f \mid h$, akkor $f \mid g \pm h$,
- (8) ha $f \mid g$, akkor $f \mid gh$,
- (9) ha $h \neq 0$, akkor $f \mid g$ akkor és csak akkor, ha $fh \mid gh$.
- (10) ha $f \mid g$ és $g \neq 0$, akkor $\deg f \leq \deg g$.

16. Házi feladat. (ápr. 5?.) Igazolja az előző tétel tetszőleges két pontját.

17. Megjegyzés. Nem véletlen, hogy az egész számokra érvényes oszthatósági tulajdonságok test feletti polinomokra is érvényesek. Ugyanis az oszthatóság fogalma tetszőleges kommutatív egység-elemes zérusosztómentes gyűrűkben, úgynevezett **integritástartományokban** hasonlóan definiálható. Továbbá a (3), (5), (10) pontok kivételével a 15. tétel is teljesül tetszőleges integritástartományban. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többször is hasonlóképpen definiálható test feletti polinomgyűrűkben, mint ahogy egész számok körében is volt. Ezek a definíciók is megadhatók tetszőleges integritástartományban.

18. Definíció. Az f és g polinomok **asszociáltak**, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, amelyet a $\sim$ relációval jelölünk.

19. Példa. $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben $\bar{2}x^3 + x + \bar{2} \sim x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$, valamint $\mathbb{R}[x]$ -ben $6x^2 + 2x + 1 \sim x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$.

20. Megjegyzés. Ha a $T[x]$ test feletti polinomgyűrűben az egymáshoz asszociált polinomokat részhalmazokba gyűjtjük, akkor a $T[x]$ egy úgynevezett **osztályozását** kapjuk, ami azt jelenti, hogy bármely két részhalmaz metszete üreshalmaz, és a részhalmazok egyesítése visszadja $T[x]$ -et. Ekkor a részhalmazokat **osztályoknak** nevezzük. A 0 polinomhoz semelyik másik polinom sem asszociált, ezt kivéve minden asszociáltsági osztályban pontosan egy főpolinom van.

21. Definíció. A h polinom az f, g polinomok **legnagyobb közös osztója**, ha teljesülnek a következők

(lnko1) $h \mid f$ és $h \mid g$ (azaz közös osztó), és

(lnko2) bármely k polinomra, ha $k \mid f$ és $k \mid g$, akkor $k \mid h$ (azaz minden közös osztónak a többszöröse).

Hasonlóan, a h polinom az f, g polinomok **legkisebb közös többszöröse**, ha

(lkkt1) $f \mid h$ és $g \mid h$ (azaz közös többszörös), és

(lkkt2) bármely k polinomra, ha $f \mid k$ és $g \mid k$, akkor $h \mid k$ (azaz minden közös többszörösnek az osztója).

22. Tétel. A legnagyobb közös osztó (és a legkisebb közös többszörös) asszociáltság erejéig egyértelműen meghatározott. Tehát, ha h az f és g polinomok legnagyobb közös osztója, akkor h minden asszociáltja is legnagyobb közös osztó és rajtuk kívül nincs más legnagyobb közös osztó.

23. Jelölés. Az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját **lnko**(f, g)-vel jelöljük, és általában nem azt írjuk, hogy $h = \text{lnko}(f, g)$, hanem azt, hogy $h \sim \text{lnko}(f, g)$. Hasonlóan a legkisebb közös többszöröst **lkkt**(f, g)-vel jelöljük.

24. Definíció. Az f és g polinomok **relatív prímek**, ha $\text{lko}(f, g) \sim 1$.

25. Tétel (Maradékos osztás). Legyen T test, $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$. Ekkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott $q, r \in T[x]$ polinomok, amelyekre $f = qg + r$ és $\deg r < \deg g$.

26. Definíció. Az előző tételben szereplő f polinomot **osztandónak**, g -t **osztónak**, q -t **hányadosnak** és r -t **maradéknak** nevezzük.

27. Megjegyzés. Ahogy láttuk test feletti polinomgyűrűben is elvégezhető a maradékos osztás, az egész számokhoz hasonló módon. Ez nem végezhető el tetszőleges gyűrűben, sőt a 17. megjegyzésben az integritástartományra megadott feltételeken túl szükséges egy úgynevezett **euklideszi norma**, ami az egész számok körében az abszolútérték, míg tetszőleges f polinom esetén a $\deg f + 1$ (a $+1$ -re azért van szükség, hogy a 0 polinom normája legyen 0). Az ilyen gyűrűkben bármely két elemnek létezik legnagyobb közös osztója, ami az egész számoknál már megismert euklideszi algoritmussal meghatározható.

28. Tétel (Euklideszi algoritmus). Legyen T tetszőleges test. Bármely két $f, g \in T[x]$ polinomnak van legnagyobb közös osztója, amely az alábbi euklideszi algoritmussal megkapható. Az $r_0 = f$ és $r_1 = g$ polinomokon végrehajtott euklideszi algoritmus maradékos osztások ismételt elvégzését jelenti:

$$\begin{array}{ll} r_0 = q_1 r_1 + r_2 & (\deg r_2 < \deg r_1) \\ r_1 = q_2 r_2 + r_3 & (\deg r_3 < \deg r_2) \\ \vdots & \vdots \\ r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & (\deg r_n < \deg r_{n-1}) \\ r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1} & (r_{n+1} = 0). \end{array}$$

Az eljárás véges számú lépés után véget ér, azaz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r_{n+1} = 0$. Ekkor a legnagyobb közös osztó az utolsó nemnulla maradék, azaz $\text{lko}(f, g) \sim r_n$.

29. Példa. Euklideszi algoritmus segítségével meghatározzuk $\text{lko}(f, g)$ -t, ahol $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$, $f = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x$, $g = x^3 + \bar{3}x + \bar{1}$. A maradékos osztások elvégzésével kapjuk:

$$\begin{aligned} \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x &= (\bar{2}x + \bar{3})(x^3 + \bar{3}x + \bar{1}) + \bar{2}x^2 + x + \bar{2} \\ x^3 + \bar{3}x + \bar{1} &= (\bar{3}x + \bar{1})(\bar{2}x^2 + x + \bar{2}) + x + \bar{4} \\ \bar{2}x^2 + x + \bar{2} &= (\bar{2}x + \bar{3})(x + \bar{4}) + \bar{0}. \end{aligned}$$

Így a legnagyobb közös osztó: $\text{lko}(f, g) \sim x + \bar{4}$.

30. Tétel. Bármely $f, g, h \in T[x]$ polinomra teljesülnek az alábbiak.

- (1) $\text{lko}(0, f) \sim f$,
- (2) $\text{lko}(f, g) \sim f$ akkor és csak akkor, ha $f \mid g$,
- (3) $\text{lko}(f + gh, g) \sim \text{lko}(f, g)$,
- (4) ha $\text{lko}(f, g) \neq 0$, akkor $\text{lko}(f/\text{lko}(f, g), g/\text{lko}(f, g)) \sim 1$,
- (5) ha $\text{lko}(f, g) \neq 0$, akkor $\text{lkt}(f, g) \sim \frac{fg}{\text{lko}(f, g)}$,
- (6) ha $\text{lko}(f, h) \sim 1$ és $h \mid fg$, akkor $h \mid g$.

31. Definíció. A $c \in T$ elem **gyöke** (más szóval **zérushelye**) az $f \in T[x]$ polinomnak, ha $f(c) = 0$.

32. Tétel (Bézout tétele). Bármely $f \in T[x]$ és $c \in T$ esetén

$$f(c) = 0 \iff x - c \mid f.$$

33. Házi feladat. (ápr. 12.) Fejezze be az előző tétel bizonyítását.

34. Következmény. Tetszőleges $f, g \in T[x]$ polinomok közös gyökei ugyanazok, mint az $\text{lko}(f, g)$ gyökei.

35. Tétel (Horner-módszer). Legyen $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ egy n -edfokú polinom és $c \in T$. A Horner-módszerrel elkészített táblázat:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	b_n	b_{n-1}	$\dots$	b_1	b_0

ahol

$$b_n = a_n,$$

$$b_i = b_{i+1} \cdot c + a_i \quad (i = n-1, \dots, 0).$$

Ekkor b_0 nem más, mint az f -nek az $x - c$ polinommal való osztásakor keletkező maradék, $b_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1$ pedig ugyanezen osztás hányadosa:

$$f = (x - c) \cdot (b_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1) + b_0.$$

36. Definíció. Az $f \in T[x]$ polinomnak a $c \in T$ elem **k -szoros gyöke**, ha $(x-c)^k \mid f$, de $(x-c)^{k+1} \nmid f$. A $k \in \mathbb{N}$ számot a c gyök **multiplicitásának** nevezzük.

37.* Tétel. Alkalmazzuk a Horner-módszert az $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinomra és a $c \in T$ konstansra, majd egészítsük ki a táblázatot egy újabb, az előzőnél eggyel rövidebb sorral a szokásos Horner-módszer számolási szabályával. Folytassuk újabb, egyre rövidebb sorokkal, míg végül egy háromszög alakú táblázatot kapunk:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
c				$\dots$			d_0
c				$\dots$			d_1
c				$\dots$			d_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
c			d_{n-2}				
c		d_{n-1}					
c	d_n						

A táblázat jobb szélén átlósan elhelyezkedő számok megadják annak a polinomnak az együtthatóit, amelyet f -ből az $x - c$ határozatlanra való áttéréssel kapunk (természetesen $d_0 = f(c)$ és $d_n = a_n$):

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = d_n (x - c)^n + \dots + d_1 (x - c) + d_0.$$

A táblázatból az is kiolvasható, hogy c hányszoros gyöke f -nek: az a legkisebb k egész, amelyre $d_0 = d_1 = \dots = d_{k-1} = 0$ és $d_k \neq 0$.

38. Példa. Meghatározzuk, hogy hányszoros gyöke az $f = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 16x + 4 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a -2 , és felírjuk f -et $x + 2$ polinomjaként. Alkalmazzuk a Horner-módszert f -re és a $c = -2$ konstansra, amíg háromszög alakú táblázatot kapunk.

	1	4	7	13	16	4
-2	1	2	3	7	2	0
-2	1	0	3	1	0	
-2	1	-2	7	-13		
-2	1	-4	15			
-2	1	-6				
-2	1					

A táblázatból kiolvasható, hogy a -2 kétszeres gyöke f -nek, továbbá

$$f = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 16x + 4 = (x + 2)^5 - 6(x + 2)^4 + 15(x + 2)^3 - 13(x + 2)^2 + 0(x + 2) + 0.$$

39. Házi feladat. (ápr. 12.) Adjon példát olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ negyedfokú (nem hiányos) polinomra, amely polinom valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén $x - c$ hatványaiként felírva már egy olyan negyedfokú polinom lesz, amelynek minden a_i együtthatója 0, ha i páratlan. Igazolja is. (Hogyan segít ez az átírás az f polinom komplex gyökeinek meghatározásában?)

Irreducibilis polinomok

40. Definíció. A $p \in T[x]$ polinom **irreducibilis**, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, hogy az egyik tényező asszociált p -hez. Ekkor a másik tényező szükségképpen asszociált 1-hez; az ilyen felbontást **triviális faktorizációnak** nevezzük.

41. Tétel. Legyen $p \in T[x]$. A p polinom akkor és csakis akkor irreducibilis T felett, ha legalább elsőfokú, és nem bontható fel úgy két polinom szorzatára, hogy mindkét polinom fokszáma kisebb $\deg p$ -nél.

42. Definíció. A $p \in T[x]$ polinom **prím**, ha legalább elsőfokú, és valahányszor osztója egy szorzatnak, mindannyiszor osztója a szorzat valamelyik tényezőjének.

43.* Tétel. A prím és irreducibilis polinomok megegyeznek.

44.* Tétel. Legyen T tetszőleges test. Minden nemnulla $f \in T[x]$ polinom felírható, mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen,

$$f = ap_1 \cdots p_n$$

alakban, ahol $a \in T \setminus \{0\}$ az f főegyütthatója, $p_1, \dots, p_n \in T[x]$ pedig irreducibilis főpolinomok.

45. Tétel. Bármely test felett minden elsőfokú polinom irreducibilis, és van gyöke.

46. Tétel. Ha $f \in T[x]$ irreducibilis és $\deg f \geq 2$, akkor f -nek nincsen gyöke.

47. Tétel. Bármely test feletti másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor nem irreducibilis, ha van gyöke.

48. Házi feladat. (ápr. 26.) Fejezze be az előző tétel bizonyítását.

49. Házi feladat. (ápr. 26.) Adja meg $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben összes legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomot.

50. Tétel. Bármely test feletti legalább 4-ed fokú polinom ha irreducibilis, akkor nincs gyöke, de az implikáció megfordítása nem igaz.

51.* Tétel (Az algebra alaptétele). Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok testében.

52. Következmény. A komplex számok teste felett pontosan az elsőfokú polinomok az irreducibilisek.

53. Következmény. Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinom elsőfokú polinomok szorzatára bomlik. Ha $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ ahol $a_n \neq 0$, akkor f -nek multiplicitással számolva pontosan n gyöke van. Ha ezek a gyökök $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, akkor $f = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$. Ezt nevezzük az f polinom **gyöktényezős felbontásának**.

54. Tétel. Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és ha $f(z) = 0$ valamely $z \in \mathbb{C}$ komplex számra, akkor $f(\bar{z}) = 0$.

55. Következmény. Egy valós együtthatós polinom pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú polinom amelynek nincs valós gyöke.

56. Következmény. Minden páratlan fokszámú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

57. Példa. Felírjuk az $f = x^5 + 2x^3 - 8x$ polinomot irreducibilis polinomok szorzataként $\mathbb{C}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben. Alakítsuk szorzattá az f polinomot.

$$f = x^5 + 2x^3 - 8x = x(x^4 + 2x^2 - 8) = x(x^2 - 2)(x^2 + 4) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i)$$

Mivel minden tényező elsőfokú, így megkaptuk $\mathbb{C}[x]$ -ben az irreducibilis felbontást. A 54. tétel alapján egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom nem valós gyökei között mindig találunk konjugált párokat. Ezt felhasználva a $\mathbb{C}[x]$ -beli felbontásból általában úgy kapjuk az $\mathbb{R}$ feletti felbontást, ha a nem valós gyököknek megfelelő elsőfokú polinomokat megszorozzuk a konjugáltjának megfelelő elsőfokú polinommal. A mi esetünkben $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$ teljesül, így az $\mathbb{R}$ feletti irreducibilis felbontás:

$$f = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4).$$

58. Definíció. Tetszőleges T test és $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in T[x]$ polinom esetén f deriváltja az $f' = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \in T[x]$ polinom.

59. Megjegyzés. Az analízisben szereplő derivált fogalomhoz képest eltérés van, mert az a függvényen alapul, itt pedig nem a polinomfüggvényt tekintjük, hanem a polinomnak, mint formális kifejezésnek adjuk meg a deriváltját. A következő tételek számtest feletti polinomokról szólnak, azaz a T test komplex számokból álló test, például a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ számhalmazok valamelyike.

60.* Tétel. Legyen T tetszőleges számtest, és legyen $f \in T[x]$ és $k \in \mathbb{N}$. Ha c komplex szám k -szoros gyöke f -nek, akkor a c szám $(k-1)$ -szeres gyöke f' -nek.

61. Következmény. Tetszőleges T számtest esetén, tetszőleges $f \in T[x]$ nemzérus polinom esetén a c komplex szám akkor és csakis akkor többszörös gyöke f -nek, ha $f(c) = f'(c) = 0$.

62. Következmény. Legyen T számtest, és $f \in T[x]$ nemzérus polinom. Az $\text{lnko}(f, f')$ polinom gyökei pontosan az f polinom többszörös gyökei, mégpedig 1-gyel kisebb multiplicitással, mint f -ben.

63. Következmény. Legyen T számtest, és $f \in T[x]$ nemzérus polinom. Az $\frac{f}{\text{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei pontosan az f polinom többszörös gyökei, csak mindegyik egyszeres.

64. Tétel (Viète-formulák). Legyenek az n -edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom gyökei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (mindegyiket annyszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása). Ekkor fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\vdots \\ (-1)^k a_{n-k} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}, \\ &\vdots \\ (-1)^n a_0 &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned}$$

65. Tétel (Lagrange interpolációs tétele). Legyen T számtest, $c_0, c_1, \dots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \dots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i -k páronként különböznek. Ekkor létezik pontosan egy $L \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, $\dots$, $L(c_n) = d_n$. Ez az L polinom a következő:

$$L = \sum_{i=0}^n \frac{(x - c_0) \dots (x - c_{i-1})(x - c_{i+1}) \dots (x - c_n)}{(c_i - c_0) \dots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \dots (c_i - c_n)} \cdot d_i.$$

Az L polinomot a $c_0, \dots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük.

66. Megjegyzés. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az L által meghatározott polinomfüggvény grafikonja a (c_0, d_0) , (c_1, d_1) , $\dots$, (c_n, d_n) pontokon megy át.

67. Példa. Meghatározzuk a $(-1, 1)$, $(-2, 4)$, $(-3, -7)$ pontokra illeszkedő L Lagrange-polinomot. A Lagrange-féle interpolációs polinom a következő tagokból áll:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(x - (-2))(x - (-3))}{(-1 - (-2))(-1 - (-3))} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 5x + 6), \\ L_1 &= \frac{(x - (-1))(x - (-3))}{(-2 - (-1))(-2 - (-3))} \cdot 4 = (-4) \cdot (x^2 + 4x + 3), \\ L_2 &= \frac{(x - (-1))(x - (-2))}{(-3 - (-1))(-3 - (-2))} \cdot (-7) = \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (x^2 + 3x + 2). \end{aligned}$$

Tehát $L = L_0 + L_1 + L_2 = -7x^2 - 24x - 16$.

Harmad- és negyedfokú egyenletek

68. Történet. A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképletének története:

- Scipione del Ferro megoldja a harmadfokú egyenlet bizonyos típusait, de módszerét titokban tartja.
- 1526: del Ferro a halálos ágyán elárulja a titkot tanítványának, Fiornak, a jegyzetfüzetét pedig vejére bízta.
- 1535: Fior és Niccolo Fontana Tartaglia versenye. Tartaglia megoldja Fior összes feladványát, Fior viszont egyet sem old meg teljesen.
- 1539: Girolamo Cardano (nagy nehezen) kiszedi Tartagliából a módszert.
„Esküszöm Önnek az Úr Szent Evangéliumára, és nem csak egy igaz ember szavát adom Önnek, hogy soha nem publikálom az Ön felfedezését, ha rám bízta, de ígérem azt is, és legyen igaz keresztény lelkiismeretem az Ön biztosítéka, hogy oly módon titkosítom, hogy halálom után senki sem tudja majd elolvasni a feljegyzetteket. Ha Ön úgy gondolja, hogy megérdemlem a bizalmat, akkor tegye meg nekem ezt a szívességet, ha pedig nem, akkor fejezzük be ezt a beszélgetést.”
- 1539: Cardano tovább vizsgálja a harmadfokú egyenleteket, felfedezi a casus irreduciblist.
- 1540: Lodovico Ferrari megoldja a negyedfokú egyenletet, de nem publikálhatja Cardano fogadalma miatt.
- 1543: Cardano és Ferrari Bolognába utazik, és del Ferro veje megmutatja nekik a jegyzetfüzetet.
- 1545: Cardano kiadja Ars Magna című művét, benne a harmadfokú egyenlet megoldásával, hivatkozva del Ferro és Tartaglia munkájára. Tartaglia esküszegéssel vádolja Cardanot.
- 1548: Tartaglia nem akar Ferrarival megküzdeni, Cardano pedig Tartagliával nem akar. Tartaglia egy jó állás reményében mégis elfogadja Ferrari kihívását, de alulmarad, és az éj leple alatt megszökik.

69.* Állítás. Az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$) harmadfokú egyenletből az $x = y + \frac{b}{3a}$ új ismeretlenre való áttéréssel eltűnik a másodfokú tag, tehát a főegyütthatóval való leosztás után

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú egyenletet kapunk.

70. Tétel. Az $x^3 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{C}$) harmadfokú egyenlet minden megoldása megkapható a **Cardano-képlet** segítségével:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A képlet kilenc számot is adhat, de ezek közül legfeljebb három lehet megoldása az egyenletnek, nevezetesen azok, ahol a két köbgyök szorzata $-\frac{p}{3}$.

Ha u és v a két köbgyök egy-egy ilyen értéke, akkor az $x^3 + px + q$ polinom három gyöke (multiplicitással):

$$u + v, \quad u\varepsilon + v\bar{\varepsilon}, \quad u\bar{\varepsilon} + v\varepsilon,$$

ahol ε primitív harmadik egységgyök.

71. Példa. Megoldjuk az $x^3 + 6x = 20$ egyenletet. Behelyettesítve a Cardano-képletbe ($p = 6$, $q = -20$), ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}}_v.$$

Tehát ebben az esetben pozitív szám van a négyzetgyök alatt. A két köbgyök három-három értéke (figyelni kell a párbaállításra: $u_i v_i = -2$):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} & u_2 &= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon & u_3 &= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon} \\ v_1 &= \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} & v_2 &= \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon} & v_3 &= \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = 2 \\ \alpha_2 &= -1 + 3i \\ \alpha_3 &= -1 - 3i\end{aligned}$$

72. Példa. Megoldjuk az $x^3 = 15x + 4$ egyenletet. Behelyettesítve a Cardano-képletbe ($p = -15$, $q = -4$), ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}}_v = \underbrace{\sqrt[3]{2 + 11i}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{2 - 11i}}_v.$$

Tehát ebben az esetben a négyzetgyök alatt negatív szám van (casus irreducibilis).

A $\sqrt[3]{2 + 11i}$ köbgyökvonást elvégezni nem könnyű. Vegyük észre, hogy $(2 + i)^3 = 2 + 11i$. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (2 + i) + (2 - i) = 4 \\ \alpha_2 &= (2 + i)\varepsilon + (2 - i)\bar{\varepsilon} = -2 - \sqrt{3} \\ \alpha_3 &= (2 + i)\bar{\varepsilon} + (2 - i)\varepsilon = -2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

73.* Tétel. A valós együtthatós $x^3 + px + q$ harmadfokú polinom valós, illetve nemvalós gyökeinek száma a $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ szám előjelétől függ az alábbi módon:

- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, akkor egy valós és két nemvalós konjugált komplex gyök van;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, akkor minden gyök valós, és közülük (legalább) kettő egybeesik;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, akkor három különböző valós gyök van, ezt az esetet nevezzük **casus irreducibilisnek**.

74. Definíció. Az $x^3 + px + q$ polinom **diszkriminánsának** a $D = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ számot nevezzük.

75. Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a diszkrimináns nem más, mint

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a polinom komplex gyökei (valójában ez a diszkrimináns definíciója).

Hasonlóan lehet definiálni tetszőleges fokszámú polinom diszkriminánsát is. Az $f = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ polinom diszkriminánsa:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

76. Házi feladat. (máj. 10?.) Adjon példát olyan harmadfokú polinomra, amelynek egy valós és két nemvalós konjugált komplex gyöke van, és keresse meg a gyököket a Cardano-képlet segítségével.

Tekintsük az $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ negyedfokú polinomot, és vegyük a $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$ polinomot, ahol α komplex paraméter. Ekkor $g^2 = x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha\right)x^2 + a\alpha x + \alpha^2$, és képezzük a $k = g^2 - f = \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)x^2 + (a\alpha - c)x + (\alpha^2 - d)$ különbséget. Ha az α paramétert úgy választjuk meg, hogy k teljes négyzet legyen, azaz ha találunk olyan h legfeljebb elsőfokú polinomot, amelyre $k = h^2$, akkor $f = g^2 - h^2 = (g + h)(g - h)$ teljesül. Így az f negyedfokú polinomot két másodfokú polinom szorzatára bontjuk, amelyeknek a komplex gyökeit meg tudjuk határozni. A k legfeljebb másodfokú polinom akkor lesz teljes négyzet, ha a $k = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0, innen adódik a következő definícióban szereplő kubikus rezolvens.

77. Definíció. Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet **kubikus rezolvensének** az

$$(a\alpha - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)(\alpha^2 - d) = 0$$

egyenletet nevezzük (ami az α ismeretlenre nézve harmadfokú egyenlet).

78. Tétel (Ferrari módszere). Legyen $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$, és legyen α megoldása az $f(x) = 0$ negyedfokú egyenlet kubikus rezolvensének. Ekkor az

$$(1) \quad \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)x^2 + (a\alpha - c)x + (\alpha^2 - d)$$

másodfokú polinom teljes négyzet, azaz valamely $h \in \mathbb{C}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinom négyzete. A $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$ jelölést használva

$$f = g^2 - h^2 = (g + h)(g - h),$$

vagyis f két másodfokú polinom szorzatára bomlik, és így gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképletével meghatározhatók.

79. Megjegyzés. A 77. Definícióban megadott kubikus rezolvenst α hatványaiként átírva a

$$(2) \quad -8\alpha^3 + 4b\alpha^2 + (8d - 2ac)\alpha + a^2d - 4bd + c^2 = 0$$

egyenletet kapjuk.

80. Példa. Megkeressük az $f = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$ polinom gyökeit. A (2) formula alapján a kubikus rezolvens α hatványaiként felírva:

$$-8\alpha^3 - 24\alpha^2 - 48\alpha - 64 = 0.$$

A 69. Állításban szereplő helyettesítés most $\beta = \alpha + 1$ alakú. A főegyütthatóval, -8 -cal, történő leosztás után a

$$\beta^3 + 3\beta + 4 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek $\beta = -1$ egy megoldása, így $\alpha = -2$ megoldása a kubikus rezolvensnek. Ekkor az (1) polinom

$$6x^2 - 12x + 6 = (\sqrt{6}x - \sqrt{6})^2$$

alakú, tehát Ferrari módszerénél $h = \sqrt{6}x - \sqrt{6}$, továbbá $g = x^2 + 2x - 2$. Ekkor

$$f = (g + h)(g - h) = \left(x^2 + (2 + \sqrt{6})x - 2 - \sqrt{6}\right) \left(x^2 + (2 - \sqrt{6})x - 2 + \sqrt{6}\right).$$

A másodfokú egyenletek megoldásával megkapjuk a gyököket:

$$\frac{-2 - \sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 8\sqrt{6}}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{6} \pm \sqrt{18 - 8\sqrt{6}}}{2}.$$