

MTN212E: Logika
(előadásvázlat, 2022. február 13.)
Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

1. ÍTÉLETKALKULUS

1. Definíció. **Ítéletnek** nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke** igaz (vagy hamis). Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

2. Példa. Az alábbi mondatok közül A és B ítélet, de C és D nem az.

A : A Föld a Nap körül kering.

B : Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)

C : Miért kering a Föld a Nap körül?

D : Most nem mondok igazat.

(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

3. Példa. A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

F : Ha süt a nap, akkor kimegyek az uszodába.

G : Kimegyek az uszodába, és süt a nap.

H : Nem süt a nap.

I : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

J : Kimegyek az uszodába, vagy süt a nap.

K : Akkor és csak akkor süt a nap, ha kimegyek az uszodába.

4. Definíció. Tetszőleges A , B ítéletre definiáljuk az alábbi **összetett ítéleteket**:

(1) A **negációja** a „nem A ” ítélet, melynek jele $\neg A$;

(2) A , B **konjunkciója** az „ A és B ” ítélet, melynek jele $A \wedge B$;

(3) A , B **diszjunkciója** az „ A vagy B ” ítélet, melynek jele $A \vee B$;

(4) A , B **implikációja** a „ha A , akkor B ” ítélet, melynek jele $A \rightarrow B$;

(5) A , B **ekvivalenciája** az „akkor és csak akkor A , ha B ” ítélet, melynek jele $A \leftrightarrow B$.

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor **primitív ítéletnek** nevezzük.

5. Definíció. Az előző definícióban bevezetett öt **logikai művelet** művelet táblázatai a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke kistámítható:

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
h	i	h	h	h	h	i	i
h	i	h	i	h	i	i	h
i	h	i	h	h	i	h	h
i	h	i	i	i	i	i	i

6. Példa. A mindennapi életben a „vagy” kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

L : Kávét hoz, vagy álmos. (**megengedő vagy**: akár mind a kettő megtörténhet.)

M : Gyalog megy, vagy biciklizik. (**kizáró vagy**: csak az egyik történhet meg.)

Az „ A kizáró vagy B ” ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

7. Példa. A „csak akkor A , ha B ”, „ B szükséges feltétele A -nak”, „ A elegendő feltétele B -nek” és „ha A , akkor B ” ítéletek mind ugyanazt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

N : Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.

O : A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.

P : Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütésnek.

Q : Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

8. Definíció. **Ítéletváltozónak** nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az ítéletkalkulus **formulái** a következők:

- (1) az ítéletváltozók mindegyike formula;
- (2) ha F, G formula, akkor $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

9. Definíció. Legyenek F és G formulák. Azt mondjuk, hogy a G **részformulája** F -nek, ha fellép az előző definícióban leírt előállítás során.

10. Példa. Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a primitéleteket jelöli. Például a következő ítéletek

R : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

S : Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.

T : Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

egy lehetséges formalizálása a következő: $R = A \rightarrow B, S = (\neg B) \rightarrow (\neg A), T = \neg((A \wedge (\neg B)))$, ahol az A és B ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába” és „Süt a nap” primitéleteket jelöli.

11. Házi feladat. (feb. 8.) Adjon meg egy-egy olyan ítéletet, amelynek formalizálása a következő. Az ítéletváltozók primitéleteket jelöljenek, és a két ítéletnél nem feltétlenül kell ugyanazokat a primitéleteket használni.

- (1) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (B \wedge C)$;
- (2) $(\neg A) \leftrightarrow (B \rightarrow C)$.

12. Definíció. Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a **formula igazságértéke** a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuk a formula **igazságtáblázatát**.

13. Példa. A 10. példa T formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	h	i	h	i
h	i	h	h	i
i	h	i	i	h
i	i	h	h	i

14. Definíció. Az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblázata megegyezik). Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy $F \equiv G$. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv \mathbf{i}$.

15. Tétel. Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

$\wedge, \vee$ alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{lll}
 A \wedge A \equiv A, & A \vee A \equiv A, & \text{(idempotencia)} \\
 A \wedge B \equiv B \wedge A, & A \vee B \equiv B \vee A, & \text{(kommutativitás)} \\
 (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), & (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), & \text{(asszociativitás)} \\
 A \wedge (A \vee B) \equiv A, & A \vee (A \wedge B) \equiv A, & \text{(abszorptivitás)} \\
 A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & \text{(disztributivitás)}
 \end{array}$$

$\neg$ alaptulajdonsága:

$$\begin{array}{ll}
 \neg(\neg A) \equiv A, & \text{(dupla tagadás)} \\
 \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), & \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \quad \text{(De Morgan szabályok)}
 \end{array}$$

$\mathbf{i}$ és $\mathbf{h}$ alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll} A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, & A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i}, \\ A \wedge \mathbf{i} \equiv A, & A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \\ A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, & A \vee \mathbf{h} \equiv A, \\ \mathbf{i} \rightarrow A \equiv A, & \mathbf{h} \rightarrow A \equiv \mathbf{i}, \\ A \rightarrow \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, & A \rightarrow \mathbf{h} \equiv \neg A, \end{array}$$

$\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B, & A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), \\ A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A), & A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A, \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C, & (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C), \\ A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), & (A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C). \end{array}$$

16. Tétel. Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

17. Tétel. Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

18. Következmény. Minden F formula logikailag ekvivalens egy olyan G formulával, amelyben csak negáció, konjunkció (és diszjunkció) szerepel.

19. Házi feladat. (feb. 8.) A bizonyítás (3)(e) része.

20. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak negáció, konjunkció és diszjunkció szerepelhet. Legyen F^* az a formula, amelyet az F -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden $\vee$ jelet $\wedge$ -re cserélünk,
- (2) minden $\wedge$ jelet $\vee$ -re cserélünk,
- (3) minden negálatlan ítéletváltozót negáltra cserélünk, és
- (4) minden negált ítéletváltozót negálatlanra cserélünk.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

21. Házi feladat. (feb. 15.) A bizonyítás (3)(c) része.

22. Példa. Legyen $F = A \wedge (B \vee \neg C)$. Ekkor $\neg F \equiv F^* = \neg A \vee (\neg B \wedge C)$. Figyelem, fontos, hogy azok a negációk, amelyek nem ítéletváltozóra vonatkoznak, megmaradnak az F^* formulában. Például ha $F = A \wedge \neg(B \vee \neg C)$, akkor $\neg F \equiv F^* = \neg A \vee \neg(\neg B \wedge C)$.

23. Definíció. Az F formulát **diszjunktív normálformának** nevezünk, ha $F = K_1 \vee \dots \vee K_t$ alakú, ahol $K_1, \dots, K_t$ mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója.

Ha az $A_1, \dots, A_n$ változókból felépített $K_1 \vee \dots \vee K_t$ diszjunktív normálforma esetén a $K_1, \dots, K_t$ formulák páronként különböző n -tagú konjunkciók, amelyekben az $A_1, \dots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul, akkor **teljes diszjunktív normálformáról (TDNF)** beszélünk.

24. Példa. Tekintsük az A, B, C változókból felépített alábbi formulákat:

- | | |
|---|--|
| (1) $A \wedge (\neg B)$ | (diszjunktív normálforma, de nem TDNF), |
| (2) $A \wedge (\neg B) \wedge C$ | (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)), |
| (3) $A \vee B \vee C$ | (diszjunktív normálforma, de nem TDNF), |
| (4) $(A \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge C)$ | (diszjunktív normálforma, de nem TDNF), |
| (5) $(A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ | (teljes diszjunktív normálforma (TDNF)). |

25. Tétel. Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

2. PREDIKÁTUMKALKULUS

26. Definíció. **Predikátumnak** nevezzük az olyan függvényt vagy kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk. A predikátum változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

27. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

- (1) $O(x, y)$: „ x osztója y -nak”,
- (2) $P(x)$: „ x prímszám”,
- (3) $F(x)$: „ x felbonthatatlan szám”,
- (4) $M(x, y, z)$: „az x és y számok szorzata z ”.

28. Definíció. Tetszőleges A ítéletre és x individuumváltozóra definiáljuk az alábbi ítéleteket:

- (1) „minden x -re A ”, melynek neve **univerzális kvantifikáció** és jele $(\forall x)A$;
- (2) „létezik x , hogy A ”, melynek neve **egzisztenciális kvantifikáció** és jele $(\exists x)A$.

29. Példa. Minden ítélet, amely egy adott individuumtartomány elemeiről állít valamit, formalizálható. Például az előző példa predikátumait felhasználva a következő ítéleteket formalizáljuk (individuumtartomány az egész számok halmaza):

- (1) „tetszőleges a, b, c egész számokra ha $a \mid b$ és $b \mid c$ akkor $a \mid c$ ”

$$(\forall a, b, c)((O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c));$$
- (2) „az a szám akkor és csak akkor osztója b -nek, ha létezik olyan c egész szám, hogy $ac = b$ ”

$$O(a, b) \leftrightarrow (\exists c)(M(a, c, b));$$
- (3) „minden prímszám felbonthatatlan”

$$(\forall a)(P(a) \rightarrow F(a)).$$

30. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $\forall$ kvantor után általában implikációt, a $\exists$ kvantor után pedig „és”-t használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug” $(\forall x)(P(x) \rightarrow H(x))$ és a „létezik olyan politikus, aki hazug” $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ítéletek formalizálásai mutatják.

31. Definíció. **Függvénynek** nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve az individuumtartomány újabb elemét kapjuk. A nullváltozós függvényeket **individuumkonstansoknak** nevezzük.

32. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések függvények:

- (1) $\text{lko}(x, y)$: „ x és y (nemnegatív) legnagyobb közös osztója”,
- (2) $\text{ln}(x)$: „az x szám természetes alapú logaritmus”,
- (3) 1 : „az 1 konstans”.

33. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát (aritását). Ekkor a predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **kifejezései** a következők:

- (1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés;
- (2) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n -változós függvényjel, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezés; és
- (3) minden kifejezés az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

A predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **formulái** a következők:

- (1) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n -változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \dots, t_n)$ **prímformula**;
- (2) ha F, G formulák és x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike összetett formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

34. Példa. Legyen $\mathcal{F} = \{s\}$, ahol $s(a, b) = a \cdot b$, azaz a és b szorzata, amely 2-változós függvény. Továbbá $\mathcal{P} = \{E\}$, ahol $E(a, b) : a = b$, ami 2-változós predikátum. Ekkor a számelméletnél bevezetett oszthatóságra vonatkozó definíciókat és állításokat mind formalizálhatjuk. Például a „tetszőleges

a, b, c egészekre ha a osztója b -nek és b osztója c -nek, akkor a osztója c -nek” ítélet egy lehetséges formalizálása a következő:

$$(\forall a, b, c)((\exists x)E(s(a, x), b) \wedge (\exists x)E(s(b, x), c)) \rightarrow (\exists x)E(s(a, x), c)).$$

35. Definíció. A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F -et a **kvantor hatáskörének** hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F -beli előfordulásait **kötöttnek** nevezük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy formula **szabad változói** alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

36. Példa. A

$$(\forall x)((\exists y)E(s(x, y), z) \rightarrow E(x, y))$$

formulában a z változó szabadon fordul elő, az y változó kétszer fordul elő, először kötötten majd szabadon, az x változó szintén kétszer fordul elő, mindekettször kötötten. Tehát a formula szabad változói y és z . A y változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mint ha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\forall x)((\exists t)E(s(x, t), z) \rightarrow E(x, y)).$$

37. Megjegyzés. Ha a lerögzített predikátumjeleknek és függvényjeleknek megadjuk egy jelentését, azt **interpretációnak** nevezzük.

38. Házi feladat. (feb. 15.) Adjuk meg a következő formula két interpretációját, az első esetben az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza, a második esetben pedig az emberek halmaza:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(c(x))),$$

ahol A és B 1-változós predikátumjelek, c pedig 1-változós függvényjel.

39. Példa. Tekintsük az $F = ((\exists z)E(s(x, z), y)) \wedge ((\exists z)E(s(y, z), x))$ formulát. Ennek a formulának x és y a szabad változója, tehát minden individuumtartományon (amelyen s és E értelmezve van) meghatároz egy kétváltozós $F(x, y)$ predikátumot. Az egész számok halmazán, ha s a szorzást, E pedig az egyenlőséget jelöli, akkor ez a predikátum ekvivalens az $x = \pm y$ predikátummal. Fontos, hogy a formula interpretációja függ az individuumtartománytól és a függvényjelek és predikátumjelek rajta való interpretációjától. Ha például a s függvényjel alatt az összeadást értenénk az egész számok halmazán, akkor $F(x, y)$ az azonosan igaz predikátum lenne.

40. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját a formulák által meghatározott $F(x_1, \dots, x_n)$ és $G(x_1, \dots, x_n)$ predikátumok megegyeznek. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

41.* Tétel. Legyenek F, G tetszőleges formulák, H pedig olyan formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F, \\ \neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F), \\ (\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G, \\ (\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H. \end{aligned}$$

42.* Tétel. Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

43.* Tétel. Ha egy formula részformuláját egy vele logikailag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

44. Megjegyzés. Az ítéletkalkulussal ellentétben nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

45. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak univerzális-, egzisztenciális kvantor, negáció, konjunkció, diszjunkció szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden $\forall$ jelet $\exists$ -re cserélünk,
- (2) minden $\exists$ jelet $\forall$ -re cserélünk,
- (3) minden $\vee$ jelet $\wedge$ -re cserélünk,
- (4) minden $\wedge$ jelet $\vee$ -re cserélünk,
- (5) minden A negálatlan prímformulát $\neg A$ -ra cserélünk,
- (6) minden $\neg A$ negált prímformulát A -ra cserélünk, és
- (7) minden kifejezést meg hagyunk a prímformulákban.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.