

MTN212E: Leképezések
(előadásvázlat, 2022. február 23.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, és $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát.

Jelölje $\emptyset$ az üreshalmazt, azaz azt a halmazt, amelynek nincsen eleme.

1. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

2. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz.

Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, ugyanis ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

3. Definíció. Leképezésnek hívjuk $A \times B$ egy ϱ részhalmazát, ha teljesül, hogy minden $a \in A$ elemre pontosan egy $b \in B$ elem létezik, amelyre $(a, b) \in \varrho$ teljesül. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az a **elem** ϱ melletti **képe** b , és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$. Ekkor az a elemet a b elem **ősenek** nevezzük. Ezzel a jelöléssel a ϱ leképezés a következőképpen adható meg: $\varrho: A \rightarrow B, a\varrho = b$.

Az A halmazt **indulási halmaznak**, a B halmazt **érkezési halmaznak** nevezzük. Ha $A = B$, azaz az indulási és érkezési halmaz megegyezik, akkor a leképezést **transzformációnak** nevezzük.

4. Jelölés. Az A halmazból B -be menő összes leképezés halmazát B^A -val jelöljük.

5. Példa. Tekintsük a $\varrho = \{(x, y) \in A \times A : |x| = y\}$ halmazt, ahol $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ekkor $\varrho = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ leképezés, mert minden A -beli elemnek pontosan egy képe létezik, hiszen a számok abszolútértéke egyértelműen meghatározott. Használhatjuk a $\varrho: A \rightarrow A, x\varrho = |x|$ jelölést is.

6. Példa. Vegyük a $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ halmazt, ez nem leképezés, ugyanis például $(4, 2)$, és $(4, -2)$ is eleme ϱ -nak.

7. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\text{id}_A = \{(a, b) \in A \times A : a = b\},$$

a másik jelölést használva:

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad a \text{id}_A = a$$

8. Definíció. A $\varrho: A \rightarrow B$ és a $\sigma: B \rightarrow C$ **leképezések szorzatán** a $\varrho\sigma: A \rightarrow C$ $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$ leképezést értjük.

9. Példa. Tekintsük a $\varrho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x\varrho = 5|x| + 1$ és a $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\sigma = \frac{6}{x}$ leképezéseket. Ekkor a szorzatuk a $\varrho\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, x(\varrho\sigma) = (x\varrho)\sigma = (5|x| + 1)\sigma = \frac{6}{5|x| + 1}$ leképezés.

10. Házi feladat.

11. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B, \sigma: B \rightarrow C$ és $\tau: C \rightarrow D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

12. Házi feladat. (feb. 22.) Igazolja, hogy a leképezések szorzása nem kommutatív, abban az esetben sem, ha a kiindulási és az érkezési halmazok megegyeznek, azaz adjon példát olyan ϱ és σ $A \rightarrow A$ leképezésekre, amelyekre $\varrho\sigma \neq \sigma\varrho$.

13. Definíció. A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **szürjektív**, ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **injektív**, ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \rightarrow a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés **bijektív**, ha szürjektív és injektív is.

14. Példa. A 5. példában szereplő leképezés nem szürjektív, mert például a -1 nem fordul elő képként, és nem is injektív, mert a -2 és a 2 képe megegyezik.

15. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ **leképezés inverze** a következő:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \varrho\}.$$

16. Tétel. A ϱ leképezés inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

17. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$ és $\sigma: B \rightarrow C$ leképezésekre

- (1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
- (2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
- (3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
- (4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
- (5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív;
- (6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív;

18. Házi feladat. (feb. 22.) Bizonyítsa az előző tétel (4) részét.

19. Házi feladat. (feb. 22.) Adjon példát olyan A, B, C halmazokra és $\rho: A \rightarrow B, \sigma: B \rightarrow C$ leképezésekre, melyekre σ szürjektív, de $\rho\sigma$ nem szürjektív. Azaz a (4) megfordítása nem igaz.

20.* Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B, \sigma: B \rightarrow C$ bijektív leképezésre

- (1) ϱ^{-1} is bijektív,
- (2) $\varrho\varrho^{-1} = \text{id}_A$,
- (3) $\varrho^{-1}\varrho = \text{id}_B$,
- (4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.