

MTN212: Komplex számok

(előadásvázlat, 2022. március 31.)

Maróti Miklós

1. Definíció. A valós számokból álló számpárokat **komplex számoknak** nevezzük. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli, azaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$, amelyet a z **kanonikus alakjának** nevezünk. Az $a \in \mathbb{R}$ számot z **valós részének**, míg a $b \in \mathbb{R}$ számot z **képzetes részének** hívjuk, és $a = \operatorname{Re} z$, illetve $b = \operatorname{Im} z$ -vel jelöljük. Az i a **képzetes egység**, $i^2 = -1$.

2. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot, és **abszolút értékén** a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ valós számot értjük.

Ha a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $i^2 = -1$, akkor a következőképpen számolhatunk kanonikus alakban.

- Összeadás: $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- Szorzás: $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
- Reciprok: mivel az i a -1 négyzetgyöke, a reciprok képzésnél a gyöktelenítésnél használt lépést hajtjuk végre, beszorzunk a számlálót és a nevezőt is a nevező konjugáltjával.

Legyen $z = a + bi \neq 0$ komplex szám, ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2i^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

3. Tétel. A $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ algebra test.

4. Definíció. Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az (a, b) koordinátájú pontot. Így kapjuk a **komplex számsíkot**, más néven a **Gauss-féle számsíkot**. Az első tengelyt (abszcissza) valós tengelynek, a második tengelyt (ordináta) pedig képzetes tengelynek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig a **tiszta képzetes számok**.

5. Megjegyzés. A komplex számsíkon a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az abszolút érték az origótól (nullától) mért távolság, a komplex számok összeadása pedig (hely)vektorok összeadása.

6. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

- (1) $\overline{\bar{u}} = u$,
- (2) $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$,
- (3) $\overline{u - v} = \bar{u} - \bar{v}$,
- (4) $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$
- (5) $\overline{u/v} = \bar{u}/\bar{v}$, ha $v \neq 0$,
- (6) $\bar{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$,
- (7) $u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u$,
- (8) $u \cdot \bar{u} = |u|^2$.

7. Házi feladat. (márc. 22.) Bizonyítsa be az előző tétel (4) és (6) részét.

8. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

- (1) $|u| = 0 \iff u = 0$,
- (2) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$,
- (3) $|u/v| = |u|/|v|$, ha $v \neq 0$,
- (4) $|u + v| \leq |u| + |v|$,
- (5) $|\bar{u}| = |u|$,
- (6) $1/u = \bar{u}/|u|^2$, ha $u \neq 0$.

9. Házi feladat. (márc. 29.) Bizonyítsa be az előző tétel (3) és (6) részét.

10.* Tétel. Legyenek $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex számok úgy, hogy a komplex számsíkon az általuk meghatározott poligon konvex, és a $z_1, \dots, z_n$ csúcsok az óramutató járásával ellentétes irányban helyezkednek el. Ekkor a poligon területe a következő képlettel számolható:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_3 + \dots + \overline{z_{n-1}} z_n + \overline{z_n} z_1).$$

11. Definíció. Egy nemnulla z komplex szám **argumentuma** az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül, hogy átmenjen a z -nek megfelelő ponton, amit **arg z** -vel jelöljük. (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.) A nulla számnak nincsen argumentuma.

12. Definíció. A nemnulla $z = a + bi$ komplex szám **trigonometrikus alakján** a

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

felírást értjük, ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\varphi = \arg z$. A nulla komplex számnak nincsen trigonometrikus alakja.

13. Megjegyzés. A nullától különböző komplex számok argumentuma csak 2π egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakja sem egyértelmű: például mind $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, mind a $\cos \frac{-3\pi}{2} + i \sin \frac{-3\pi}{2}$ az i komplex szám trigonometrikus alakja. Viszont ha egy konkrét komplex szám trigonometrikus alakját kell meghatároznunk, akkor az argumentumot mindig a $[0, 2\pi)$ intervallumban adjuk meg.

14. Tétel. Tetszőleges nullától különböző $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $v = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ komplex számokra

- (1) $\bar{u} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$
- (2) $u \cdot v = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)),$
- (3) $u^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$
- (4) $u/v = r/s \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)).$

15. Megjegyzés. A komplex számok kanonikus alakját felhasználva láthattunk, hogy rögzített $v \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén a $z \mapsto z + v$ leképezés nem más, mint a v -hez tartozó vektorral való eltolás a komplex számsíkon. A komplex számok trigonometrikus alakját felhasználva pedig látható, hogy rögzített $v = \cos \psi + i \sin \psi$ esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.

16. Példa. Az ismert szinusz és koszinusz összegzési képleteket könnyen megkaphatjuk komplex számok segítségével. Tekintsük a

$$u = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad v = \cos \psi + i \sin \psi$$

komplex számokat. A trigonometrikus alakokkal számolva a szorzatuk

$$u \cdot v = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

De ha a kanonikus alakot használjuk a szorzat kiszámolására, akkor

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \cos \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot i \sin \psi + i \sin \varphi \cdot \cos \psi + i \sin \varphi \cdot i \sin \psi \\ &= (\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi) + i(\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi). \end{aligned}$$

Mivel az $u \cdot v$ komplex szám egyértelműen írható fel kanonikus alakban, ezért

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi, \text{ és} \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi. \end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki a $\cos(\varphi - \psi)$ és $\sin(\varphi - \psi)$ képlete is, de ekkor az u és v komplex számok hányadosát kell vennünk.

17. Tétel (Moivre-képlet). Bármely nem zéró $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

18. Házi feladat. (márc. 29.) Bizonyítsa be az előző tételt teljes indukció segítségével $n \in \mathbb{N}$ esetén.

19. Példa. Tudjuk, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ és $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Megmutatjuk, hogy $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ hogyan számítható ki egyszerűen. Vegyük a $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ komplex számot és számoljuk ki a harmadik hatványát a trigonometrikus alakja

$$z^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

és a kanonikus alakjai segítségével (felhasználva azt, hogy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha) + i(3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha, \text{ és} \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

20. Definíció. Tetszőleges n pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az u komplex szám **n -edik gyöke** z -nek, ha $u^n = z$.

21. Tétel. Minden nemnulla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex számnak pontosan n különböző n -edik gyöke van, mégpedig

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

22. Definíció. Az ε komplex számot **n -edik egységgyöknek** nevezzük ($n \in \mathbb{N}$), ha $\varepsilon^n = 1$. Az ε komplex szám **egységgyök**, ha n -edik egységgyök valamely $n \in \mathbb{N}$ -re.

23. Tétel. Az n -edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k = 0, \dots, n-1$ esetén.

24. Megjegyzés. Az n -edik egységgyökök egy szabályos n -szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az n -szöget.)

25. Példa. Az első egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^1 = 1\} = \{1\}.$$

A második egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^2 = 1\} = \{1, -1\}.$$

A harmadik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

A negyedik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

A hatodik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

26. Tétel. Egy nemnulla komplex szám összes n -edik gyökét megkaphatjuk, ha egy rögzített n -edik gyökét megszorozzuk sorra az n -edik egységgyökökkel. Tehát ha $u^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n -edik gyökei: $u \cdot \varepsilon_k$ ahol $k = 0, \dots, n-1$.

27. Példa. Számoljuk ki a $\sqrt[3]{8i}$ értékeit.

Könnyen leellenőrizhető, hogy $-2i$ gyök, mivel $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Tehát ha alkalmazzuk az előző tételt, és tudjuk a harmadik egységgyököket, akkor megkapjuk a három gyököt:

$$\begin{aligned} -2i \cdot 1 &= -2i, \\ -2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \sqrt{3} + i, \\ -2i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

28. Definíció. Azt mondjuk, hogy az ε komplex szám **primitív n -edik egységgyök**, ha n -edik egységgyök, de nem m -edik egységgyök semmilyen $0 < m < n$ egészre.

29. Példa. Az 1 primitív első egységgyök. A -1 primitív második egységgyök. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyökök. Az i és $-i$ primitív negyedik egységgyökök. Az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív hatodik egységgyökök.

30.* Tétel. Az $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ egységgyök akkor és csak akkor primitív n -edik egységgyök, ha k relatív prím n -hez.