

5. feladatsor – Polinomok MEGOLDÁSOK

5.1. Feladat. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x + 1$;
- (b) $x^2 + \bar{1}$
- (c) $x^2 + 2x + 1$;
- (d) $x^2 + 6x - 7$;
- (e) $x^3 + x^2 + \bar{2}$
- (f) $\bar{2}x^2 + \bar{1}$.

5.2. Feladat. Az f és a g racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

- (a) $\text{lko}(f, g) = x^2 - 4$, közös gyök: -1 ,
 $f = (x + 1)^2(x - 3)$, $g = (x + 1)^2(x - 1)(x + 2)$;
- (b) $\text{lko}(f, g) = x^2 - 4$, közös gyökök: $2, -2$,
 $f = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)$, $g = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 3)$.

5.3. Feladat. $\text{lko}(f, g) \sim (x + 1)^2(x - 3)$.

5.4. Feladat. Az együtthatók értéke:

- (a) $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{13}{2}$;
- (b) $a = -1$, $b = 4$;
- (c) $a = -\frac{7}{18}$, $b = \frac{23}{18}$;
- (d) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

5.5. Feladat. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

- (a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
- (b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
- (c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
- (d) háromszoros; $(x - \bar{2})^3(x + \bar{2})$.

5.6. Feladat. A polinomok komplex gyökei:

- (a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;
- (b) $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$;
- (c) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$, $\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$;
- (d) $2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, -1 - \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$;
- (e) $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$;
- (f) $\sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$.

5.7. Feladat. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (b) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - 2)(x + 1 - i\sqrt{3})(x + 1 + i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (c) $x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x^2(x + 2)(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);

- (d) $(x^2 + 5)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i\sqrt{5})(x + i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
 (e) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
 (f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett).

5.8. Feladat. Egy minimális fokszámú valós együthatós polinom:

- (a) $(x-2)^2(x+1)(x-(2+i))(x-(2-i)) = (x-2)^2(x+1)(x^2-4x+5)$;
 (b) $(x-i)^3(x+i)^3(x-(3+i))(x-(3-i)) = (x^2+1)^3(x^2-6x+10)$;
 (c) $(x-(1+i))^3(x-(1-i))^3(x+2)^2(x-i)(x+i) =$
 $= (x^2-2x+2)^3(x+2)^2(x^2+1)$.

5.9. Feladat. Az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értéke:

- (a) $a = -2, b = 3$;
 (b) $a = 2, b = 4$;
 (c) $a = 3, b = 1$.

5.10. Feladat. A többszörös gyökök:

- (a) 2, -1;
 (b) -1.

5.11. Feladat. Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összege (o) és szorzata (sz).

- (a) $o = 3, sz = -4$;
 (b) $o = 0, sz = 2$;
 (c) $o = -2, sz = 0$;
 (d) $o = 0, sz = -5$;
 (e) $o = \frac{4}{3}, sz = -\frac{2}{3}$;
 (f) $o = -\frac{3}{4}, sz = \frac{1}{4}$.

5.12. Feladat.

- (a) x^2 ;
 (b) $-x^2 + 8x - 4$;
 (c) $x^2 + 3x - 4$;
 (d) $-\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$.

5.13. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

- (a) $\sqrt[3]{-38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{-38-17\sqrt{5}} = -4, \quad 2 + \sqrt{15}i, \quad 2 - \sqrt{15}i$;
 (b) casus ired. $(-1+2i) + (-1-2i) = -2, \quad 1 - 2\sqrt{3}, \quad 1 + 2\sqrt{3}$;
 (c) $y = x + 3$ helyettesítéssel $-x^3 - 6x + 20$, ami az előadásjegyzetben szerepel;
 (d) $1 \pm \sqrt{3\sqrt{2}-3}i, \quad 1 \pm \sqrt{-1+3\sqrt{2}}$.