

2. feladatsor – Leképezések

2.1. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 1$
 $\beta\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (3x + 1)^2$
- (b) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3^{2^x - 2}$
 $\beta\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2^{3^{x-1}} - 1$
- (c) $\alpha\beta: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1)$
 $\beta\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x - \frac{1}{2}$

2.2. Feladat megoldása.

- (a) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
- (b) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
- (c) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
- (d) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
- (e) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
- (f) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
- (g) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
- (h) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
- (i) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
- (j) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.

2.3. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = x^2$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert például a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.

A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert például $(-4)\beta = 4\beta$.

A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert például a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.

A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most $\mathbb{R}^+$. Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

2.4. Feladat megoldása.

- (a) Tegyük fel, hogy $x_1\alpha = x_2\alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned}x_1\alpha &= x_2\alpha \\3x_1 - 1 &= 3x_2 - 1 \\3x_1 &= 3x_2 \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén, ha az $y = 3x - 1$ formulából kifejezzük az x -et, akkor megkapjuk y őset, ami $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és így $\frac{y+1}{3} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x_1\beta = x_2\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\beta &= x_2\beta \\ (x_1+2)^2 - 4 &= (x_2+2)^2 - 4 \\ (x_1+2)^2 &= (x_2+2)^2 \\ |x_1+2| &= |x_2+2| \\ x_1+2 &= x_2+2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (x+2)^2 - 4$ formulából kifejezzük az x -et, akkor megkapjuk y őset, ami $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és így $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\beta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

(c) Tegyük fel, hogy $x_1\gamma = x_2\gamma$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\gamma &= x_2\gamma \\ (2x_1+1)^2 - 1 &= (2x_2+1)^2 - 1 \\ (2x_1+1)^2 &= (2x_2+1)^2 \\ |2x_1+1| &= |2x_2+1| \\ 2x_1+1 &= 2x_2+1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (2x+1)^2 - 1$ formulából kifejezzük az x -et, akkor megkapjuk y őset, ami $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \in \mathbb{R}^+$ és így $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\gamma^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-1}{2}.$$