1. feladatsor – Logika

1.1. Ítéletkalkulus

1.1. Feladat megoldása.

(a) $B \vee C$
(b) $B \wedge (\neg C)$
(c) $\neg A$
(d) $B \to C$
(e) $B \leftrightarrow A$

1.2. Feladat megoldása.
8 darab részformula van: A, B, C, $\neg B$, $\neg C$, $(\neg C) \to B$, $A \vee (\neg B)$, $(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \to B)$

1.3. Feladat megoldása. **(c)** $A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big)$

1.4. Feladat megoldása.

(a) $(A \vee B) \to (C \wedge D)$
(b) $A \to (\neg B \vee (B \wedge C))$
(c) $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$
(d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
(e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
(f) $(A \wedge B) \to (C \vee D)$
(g) $A \to (B \leftrightarrow \neg C)$
(h) $A \to (\neg B \wedge (\neg C \to \neg D))$
(i) $A \vee (B \wedge C)$
(j) $A \wedge (B \to \neg C)$

1.5. Feladat megoldása.

(a) $(\neg A \wedge \neg B) \to (C \leftrightarrow D)$, az ítélet hamis.
(b) $(A \wedge B) \to (C \leftrightarrow (\neg D \vee E))$, az ítélet igaz.
(c) $(A \wedge B) \to (C \to (D \vee E))$, az ítélet hamis.

1.6. Feladat megoldása. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a)

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\to$	C	$\equiv$	A	$\to$	$(B$	$\to$	$C)$
i	i	i	**i**	i		i	**i**	i	i	i
i	i	i	**h**	h		i	**h**	i	h	h
i	h	h	**i**	i		i	**i**	h	i	i
i	h	h	**i**	h		i	**i**	h	i	h
h	h	i	**i**	i		h	**i**	i	i	i
h	h	i	**i**	h		h	**i**	i	h	h
h	h	h	**i**	i		h	**i**	h	i	i
h	h	h	**i**	h		h	**i**	h	i	h

A többi feladatot is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanazt a logikai értéket kapjuk-e.

1.7. Feladat megoldása.

(a) Nem tautológia
(b) Tautológia
(c) Nem tautológia
(d) Tautológia
(e) Tautológia
(f) Tautológia
(g) Tautológia

1.8. Feladat megoldása.

(a) $B \to A$, tagadás: $(\neg A) \wedge B$.
(b) $(A \wedge B) \to C$, tagadás: $A \wedge B \wedge (\neg C)$.
(c) A, tagadása: $\neg A$.
(d) $(\neg A) \leftrightarrow B$, tagadása: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$.

1.9. Feladat megoldása.

F_1 : (nem teljes) diszjunktív normálforma
F_2 : nem diszjunktív normálforma
F_3 : teljes diszjunktív normálforma
F_4 : teljes diszjunktív normálforma

1.10. Feladat megoldása.

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(c) $(A \vee B) \to \big(\neg(C \to B)\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(d) $(A \vee (\neg B)) \to (C \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \to (\neg B)) \vee (A \wedge B)) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(f) $(\neg(A \to B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.

1.2. Predikátumkalkulus

1.11. Feladat megoldása.

(a) A 7 páros szám.
(b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
(c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
(d) A 6-nak létezik páros osztója.
(e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
(f) Két egész szám összege pontosan akkor páros, ha a szorzatuk is az.
(g) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
(h) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha legalább az egyik páratlan.
(i) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

1.12. Feladat megoldása. A teljes megoldáshoz az indoklás is kell!

(a) igaz
(b) hamis
(c) hamis
(d) hamis
(e) igaz
(f) hamis
(g) igaz
(h) igaz
(i) hamis
(j) igaz
(k) igaz
(l) hamis

1.13. Feladat megoldása.
Pirossal jelölve a kötött előfordulás, zölddel a szabad előfordulás.

(a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$
(b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$
(c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$
(d) $(\forall x)\, P\,(f\,(x, a)\,, x) \rightarrow (\exists y)\,(P\,(f\,(y, x)\,, y) \wedge Q\,(x))$

1.14. Feladat megoldása.

(a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
(b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
(c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y, x))$
(d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y, x) \rightarrow C(y, x)))$
(e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y, x)))$
(f) $(\forall x)\,(A\,(x) \rightarrow \neg F\,(x)) \wedge (\exists x)\,(\neg F\,(x) \wedge \neg A\,(x))$
(g) $(\forall x)\,(B\,(x, p) \rightarrow H\,(x))$
(h) $(\exists x)\,(H\,(x) \wedge (\neg S\,(a\,(x))))$
(i) $S\,(a\,(p))$

1.15. Feladat megoldása.
Predikátumok: $O(x, y)$: „x osztója y-nak”, $F(x)$: „x felbonthatatlan szám”, $R(x)$: „x prímszám”, $E(x)$: „x egység”, $N(x)$: „x nullára végződik”, $P(x)$: „x pozitív”, $K(x, y)$: „x kisebb y-nál”.
Függvények: $e(x)$: „x ellentetje”, $f(x)$: „x négyzete”.

(a) $(\forall x)O(x, 0)$
$\neg(\forall x)O(x, 0) \equiv (\exists x)\neg O(x, 0)$
(b) $(O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c)$
$\neg\,((O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c)) \equiv \neg\,(\neg(O(a, b) \wedge O(b, c)) \vee O(a, c)) \equiv$
$\equiv O(a, b) \wedge O(b, c) \wedge \neg O(a, c)$
(c) $(\forall x)(O(x, e(x)) \wedge O(e(x), x))$
$\neg(\forall x)(O(x, e(x)) \wedge O(e(x), x)) \equiv (\exists x)(\neg O(x, e(x)) \vee \neg O(e(x), x)) \equiv (\exists x)(O(x, e(x)) \rightarrow \neg O(e(x), x))$

(d) $P(x) \to F(x)$
$\neg(P(x) \to F(x)) \equiv \neg(\neg P(x) \vee F(x)) \equiv P(x) \wedge \neg F(x)$

(e) $E(x) \leftrightarrow (\forall y)O(x,y)$
$\neg(E(x) \leftrightarrow (\forall y)O(x,y)) \equiv \neg((\neg E(x) \vee (\forall y)O(x,y)) \wedge (\neg(\forall y)O(x,y) \vee E(x))) \equiv (E(x) \wedge \neg(\forall y)O(x,y)) \vee ((\forall y)O(x,y) \wedge \neg E(x)) \equiv (E(x) \wedge (\exists y)\neg O(x,y)) \vee ((\forall y)O(x,y) \wedge \neg E(x))$

(f) $(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))$
$\neg[(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))] \equiv (\exists x)(\neg O(1,x) \vee \neg O(x,x))$

(g) $(\forall x)(\exists y)K(y,x)$
$\neg[(\forall x)(\exists y)K(y,x)] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y,x)$

(h) $(\forall x)(O(10,x) \to N(x))$
$\neg[(\forall x)(O(10,x) \to N(x))] \equiv (\exists x)(O(10,x) \wedge \neg N(x))$

(i) $(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))$
$\neg[(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))] \equiv (\forall x)(\neg K(x,0) \vee \neg P(f(x)))$

(j) $(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))$
$\neg[(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x,0))$

1.16. Feladat megoldása.
Individuumkonstansok: m: „Mézga Géza”.
Predikátumok: $I(x)$: „x informatikus”; $E(x)$: „x éhes”; $S(x)$: „x szakács”; $K(x,y)$: „x kedveli y-t”; $F(x,y)$: „x főz y-nak”; $Sz(x)$: „x szerencsés”; $G(x,y)$: „x gyermeke y-nak”.
Függvények: $g(x)$: „x gyereke”.

(a) $(\forall x)(I(x) \to E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*

(b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \to F(x,x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x,x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*

(c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \to (\forall y)(S(y) \to K(x,y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x,y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*

(d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x,y) \to I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \to (\exists y)(F(x,y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*

(e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y)) \to K(x,y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x,y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*

(f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \to Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x,m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*

(g) $(S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x)) \to (\forall x)Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x) \wedge (\exists x)\neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*